Рудаков Константин Владимирович

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ И ЛОКАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ ДЛЯ АЛГОРИТМОВ РАСПОЗНАВАНИЯ

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I}) \arrow[r, "\mathfrak{M}"] \arrow[d, "\mathfrak{M}^0"'] & \mathfrak{C}_{q,l}(\widetilde{\mathfrak{I}}) \\
\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{R}) \arrow[r, "\mathfrak{F}"] & \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{R}) \arrow[u, "\mathfrak{M}^1"']
\end{tikzcd}$$

Оглавление

Глава 0

Введение

0.1 Краткий исторический обзор

Настоящая работа составляет часть алгебраического подхода к проблеме синтеза алгоритмов распознавания, развиваемого членом-корреспондентом АН СССР Ю. И. Журавлевым и его школой [2, 7, 9, 52–59, 61, 62, 73, 74, 96, 114, 125–140, 148]. Так как излагаемая в работе теория универсальных и локальных ограничений является, по-видимому, одним из наиболее абстрактных по форме разделов теории распознавания, представляется целесообразным рассмотреть содержательные истоки этой теории, связанные с историей возникновения и развития алгебраического подхода в целом. Не претендующий на полноту и окончательность оценок обзор этой истории и будет нашей ближайшей целью. Отметим, что в основном обзор базируется на идеях Ю. И. Журавлева.

Появление первых вычислительных машин уже в 50-х годах привело к возникновению у различных групп исследователей соображений, касающихся возможности использования ЭВМ для решения не только чисто вычислительных задач типа расчета баллистических траекторий, но и существенно иных задач обработки информации, возникающих в различных плохо формализованных прикладных областях. Наиболее важной особенностью таких задач оказывается отсутствие для исследуемых реальных ситуаций или объектов сколько-нибудь адекватных математических моделей, на базе которых можно бы было вести расчеты и получать количественные или качественные выводы. Таковы, например, многие задачи медицинской и технической диагностики, геологического и социального прогнозирования, распознавания объектов на изображениях и т.п. В большом числе работ, посвященных решению задач такого типа, можно, по-видимому, выделить три основных направления. Сознавая условность классификации, все же опишем их основные черты.

Первое направление составили работы, авторы которых исходили из того факта, что человек (и даже животные) в реальной жизни постоянно и успешно решает чрезвычайно трудные с теоретической точки зрения задачи обработки информации (классический пример — распознавание зрительных образов). Из этого делался вывод о том, что процесс решения плохо формализованных задач на ЭВМ должен моделировать основные аспекты процесса мышления. Именно такое моделирование и составляло основную цель исследований. На этом пути были получены многие интересные теоретические и даже экспериментальные результаты. Например, так были изучены персептроны [112], создана система General Problem Solver [27] и т.д. В последние годы работы в данном направлении приобрели практическую направленность в контексте синтеза экспертных систем.

Исследователи, работы которых можно условно выделить как второе направление, следовали по сути дела классическому «матфизическому» подходу. Иначе говоря, они для отдельных прикладных областей пытались строить строгие математические модели, на базе которых можно было бы получать искомые количественные или качественные результаты. В некоторых случаях работы в этом направлении приводили к выдающимся успехам (достаточно вспомнить удостоенные Нобелевской премии работы академика Л.В.Канторовича). Однако стандартной следует, видимо, считать ситуацию, когда создание адекватной математической модели для плохо формализованной прикладной сферы практически невозможно. Этот тезис подтверждается прежде всего реальным положением дел в информатике: для «нефизических» задач чрезвычайно редки примеры удачных математических моделей, т.е. моделей, с одной стороны, адекватно описывающих практические проблемы, и, с другой стороны, допускающих надлежащий обсчет.

Перейдем, наконец, к описанию третьего направления исследований, в рамках которого и возник алгебраический подход к проблеме распознавания. Представители этого направления с самого начала исходили из чисто практической посылки: несмотря на отсутствие модели того, как аналогичную задачу решает человек, и несмотря на отсутствие адекватной математической модели реальной ситуации, можно все-таки, опираясь на обычный здравый смысл, пытаться строить алгоритмы, реализующие нужный процесс преобразования информации. Развитие работ в этом направлении можно, следуя идее Ю. И. Журавлева, условно разбить на три этапа.

Первый этап, начавшийся в конце 50-х годов, характеризуется тем, что для конкретных прикладных задач разрабатывались и реализовывались отдельные алгоритмы распознавания. В этот период происходило несколько чрезвычайно важных для дальнейшего процессов.

Во-первых, выкристаллизовывались общие черты постановок задач, относящихся к внешне самым различным прикладным областям. В частности, становилось ясно, что в качестве замены адекватной математической модели чаще всего приходится использовать массивы прецедентов, т.е. пар вида «входная информация — выходная информация».

Во-вторых, происходило накопление примеров удачно решенных практических задач и соответствующих алгоритмов (поскольку эти алгоритмы строились на основе не имевших теоретического обоснования содержательных гипотез, их принято называть эвристическими). При этом имел место некоторый «естественный отбор», который проходили только хорошо зарекомендовавшие себя на практике процедуры решения.

В третьих, постепенно выяснялись общие принципы построения решений, основанные на активном использовании метрических характеристик, идеи разделения точечных множеств гиперповерхностями, применении информационных весовых коэффициентов, выделении частичных описаний объектов и иных аналогичных приемах [13, 16, 43, 63, 84, 93, 146, 153, 155].

В-четвертых, в этот период возникло понимание необходимости создания специального общего математического аппарата для исследования задач и алгоритмов и появились первые работы в этом направлении. При этом ряд эвристических процедур и конструкций был в некотором смысле теоретически обоснован [6, 38, 39, 116, 117, 145, 149, 150].

Наиболее важным результатом первого этапа можно, по-видимому, признать практическое доказательство возможности решения разнообразных важных плохо формализованных задач на основе некоторых общих информационных принципов без построения адекватных математических моделей реальных процессов или явлений.

Предпосылкой для перехода ко второму этапу в значительной степени явилось наличие групп ученых, накопивших опыт решения прикладных задач и использовавших для разных задач близкие по структуре алгоритмы (при этом типы алгоритмов у различных научных групп часто были разными). Суть второго этапа представляется возможным определить переходом от принципа «прикладная задача → алгоритм» к принципу «семейство алгоритмов → прикладная задача». Иными словами, произошло оформление (параметрических) семейств алгоритмов, имеющих весьма универсальный характер и широкие сферы потенциальных приложений. Решение практических задач в этой ситуации свелось к «настройке параметров», т.е. к решению проблемы выбора значений параметров, выделяющих из семейства оптимальный для конкретной задачи алгоритм.

Таким образом место моделей прикладных областей («квазифизических моделей») заняли семейства алгоритмов, которые можно считать моделями процессов преобразования информации. Эти семейства и принято называть моделями — моделями алгоритмов распознавания, или же эвристическими информационными моделями, поскольку они обычно создаются в результате формализации интуитивных представлений о характере связей между начальными и финальными (входными и выходными) данными в конкретных задачах.

Среди возникших на втором этапе моделей алгоритмов распознавания наибольшую известность имеют алгоритмы, основанные на принципе комитетных решений [11, 97–102, 111], алгоритмы метода потенциальных функций [3, 125], алгоритмы вычисления оценок [8, 37, 49–51, 141, 144], статистические [17, 23, 33, 34, 36, 63–65, 93, 123, 151, 152, 154, 156–160] и структурные [29, 36, 161–163] семейства.

Исследование каждой модели алгоритмов имеет свою специфику, «внутреннюю» проблематику и проблематику, связанную с решением прикладных задач. Например, для работ школы В.Д.Мазурова (комитеты линейных неравенств) основной особенностью оказались двойственные конструкции, для школы Ю. И. Журавлева (АВО — алгоритмы вычисления оценок) — принцип частичной прецедентности и алгебро-логические построения и т.д. Отметим, что модели вычисления оценок вобрали в себя большинство используемых эвристических принципов и могут потому рассматриваться как в некотором смысле универсальный язык для описания алгоритмов распознавания.

При всем разнообразии моделей общей принципиальной сложностью является проблема поиска в рамках модели оптимальных алгоритмов для конкретных задач. Построение таких алгоритмов сводится обычно к исследованию нестандартных чрезвычайно трудных экстремальных проблем, их теоретическому решению и созданию соответствующих численных методов [1, 4, 5, 10, 22–26, 28, 32, 40–42, 44–48, 51, 66–68, 76–79, 89, 90, 113, 115, 118, 141–144, 147].

Следует отметить, что решение задач распознавания в рамках фиксированных параметрических семейств получило ряд обоснований, базирующихся на принятии различных метрических или статистических гипотез о характере исследуемых реальных процессов или явлений [3, 17–20, 22–25, 30, 31, 35, 69–72, 75, 80–88, 91–94, 120–124]. Чрезвычайно существенным представляется также то, что на фундаменте теоретических работ были разработаны мощные универсальные пакеты прикладных программ распознавания КВАЗАР [100, 101, 111], ПАРК [21, 48, 58, 144] и др. Опыт использования этих пакетов для разнообразных прикладных проблем дал окончательный положительный ответ на вопрос о возможности решения плохо формализованных практических задач на базе надлежащим образом используемых эвристических информационных принципов.

Предпосылкой для возникновения условного третьего этапа (алгебраического подхода) развития рассматриваемой области послужило некоторое внутреннее противоречие, присущее самой идее использования заранее зафиксированных параметрических семейств алгоритмов. С одной стороны, для получения лучших результатов при решении конкретных задач такие семейства должны быть по возможности «богатыми». Но, с другой стороны, использование очень «богатых» и потому, как правило, сложно устроенных семейств приводит зачастую к неразрешимым с практической точки зрения оптимизационным проблемам, причем применение приближенных методов оптимизации во многих случаях не является выходом из положения (локально экстремальные решения, полученные в рамках «богатого» семейства, могут оказаться хуже оптимального решения, найденного в рамках достаточно простого семейства).

Исходным пунктом развития алгебраического подхода послужила идея о том, что помимо использования эвристических семейств алгоритмов в качестве фиксированных областей, в рамках которых следует искать решения, имеется альтернативный путь: из имеющихся семейств можно определенным образом выбирать некоторые алгоритмы и, используя подходящие операции над алгоритмами (корректирующие операции), целенаправленно строить оптимальные алгоритмы для конкретных задач. Следует отметить, что сама по себе идея совместного использования наборов алгоритмов при решении отдельных задач широко распространена и активно применяется различными группами исследователей [97–102, 111, 122]. Эта идея была использована в исходных работах Ю. И. Журавлева [54–57], в которых в качестве корректирующих операций применялись некоторые операции над действительными матрицами, а в качестве исходных семейств алгоритмов рассматривались алгоритмы, основанные на принципе разделения, и алгоритмы вычисления оценок.

Впоследствии были проведены аналогичные исследования для многих других конкретных семейств алгоритмов и корректирующих операций [2, 7–9, 12, 58, 59, 62, 73, 74, 89, 114, 125]. В результате алгебраический подход стал общетеоретической базой для исследования проблем распознавания, ориентированной на изучение используемых для решения конкретных задач математических конструкций и методов.

Наличие комплекса концепций и результатов алгебраического подхода, позволяющего сравнительно легко решать основные теоретические проблемы для отдельных информационных моделей, позволяет сказать, что в настоящее время возможен переход от принципа «семейство алгоритмов $\to$ прикладная задача» к принципу «прикладная область $\to$ модель алгоритмов». Итак, с общенаучной точки зрения третий этап близок по подходу к первому, но при этом исследования идут на качественно новом уровне.

Более подробное рассмотрение некоторых основных идей и конструкций алгебраического подхода, послуживших непосредственной причиной создания теории универсальных и локальных ограничений, будет проведено в следующем параграфе.

0.2 Об исходных конструкциях алгебраического подхода

Основным объектом исследования в большинстве работ, выполненных в рамках алгебраического подхода, были задачи классификации и соответствующие алгоритмы и семейства алгоритмов. В таких задачах рассматривается некоторое множество $\mathfrak{S}$, элементы которого S называются допустимыми объектами или просто объектами. Предполагается, что в множестве $\mathfrak{S}$ имеется набор подмножеств $K_1, \ldots, K_l$, называемых классами. Точное описание классов неизвестно, и требуется по имеющейся неполной информации для отдельных объектов или группы объектов решать вопрос об их принадлежности классам.

Существенно, что число классов l заранее известно и фиксировано для рассматриваемого множества задач или конкретной задачи (при неизвестном параметре l возникают так называемые задачи таксономии, которые далее рассматриваться не будут).

Решения вопросов о принадлежности объектов классам должны, конечно, выражаться на некотором соответствующем языке. В качестве такого языка обычно используются множества типа $\{0, 1\}$, $\{0, 1, \Delta\}$ и т.п., где 0 интерпретируется как решение $S \in K$, 1 — как $S \notin K$, Δ — как отказ от принятия решения. В общем случае можно считать, что фиксируется определяемое содержательной стороной дела множество $\widetilde{\mathfrak{I}}$ «допустимых ответов», которые и должны порождаться алгоритмами классификации.

Как уже говорилось, алгоритмы строятся на базе некоторой неполной информации о классах. Сами алгоритмы реализуют процесс преобразования соответствующей входной информации в элементы множества $\widetilde{\mathfrak{I}}$. Таким образом, в рамках рассматриваемой проблемы «сосуществуют» три вида информации: информация, используемая для синтеза алгоритма (будем называть ее структурной), «рабочая» входная информация и финальная информация (ответы алгоритма). Существенно, что деление информации на структурную и рабочую, абсолютно очевидное в конкретных практических ситуациях, оказывается весьма условным при теоретическом рассмотрении вопроса. Например, описания классов можно рассматривать и как часть структурной информации, и как часть рабочей информации. Алгоритмы, построенные во втором случае, т.е. способные обрабатывать переменную информацию о классах, при фиксации описаний классов обращаются в алгоритмы, соответствующие первому случаю.

Рассмотрим более подробно «рабочий режим» алгоритмов классификации (отличающийся от «режима настройки»).

Прежде всего отметим, что во многих случаях помимо пространства допустимых объектов $\mathfrak{S}$ рассматриваются пространство $\mathfrak{I}_{ob}$ допустимых описаний этих объектов и функция $D : \mathfrak{S} \to \mathfrak{I}_{ob}$, которая сопоставляет объектам S их допустимые описания $D(S)$. Вид множеств $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{I}_{ob}$ и функции D определяется конкретной проблемной областью, причем, конечно, не исключается, что $\mathfrak{S} = \mathfrak{I}_{ob}$, т.е. что объекты совпадают со своими описаниями.

В простейшем случае алгоритмы в «рабочем режиме» реализуют отображения из $\mathfrak{I}_{ob}$ в $\widetilde{\mathfrak{I}}$. Иначе говоря, при поступлении на вход алгоритма A описания $I_0 \in \mathfrak{I}_{ob}$ объекта S_0 из множества $\mathfrak{S}$ $(I_0 = D(S_0))$ на выходе порождается вектор $(\beta_1, \ldots, \beta_l) \in \widetilde{\mathfrak{I}}^l$, в котором β_j является допустимым ответом алгоритма A на вопрос о принадлежности объекта S_0 классу K_j при $j \in \{1, \ldots, l\}$. Такие алгоритмы можно рассматривать и как наборы $(A_1,\ldots,A_l)$, где $A : \mathfrak{I}_{ob} \to \widetilde{\mathfrak{I}}$[1].

Несколько более сложный случай возникает тогда, когда требуется реализовать явную зависимость от некоторых характеристик классов. В этой ситуации приходится рассматривать пространство $\mathfrak{I}_{cl}$ допустимых описаний классов и строить алгоритмы вида $A : (\mathfrak{I}_{ob} \times \times \mathfrak{I}_{cl}^l) \to \widetilde{\mathfrak{I}}^l$. Такие алгоритмы также можно иногда считать совокупностями $(A_1, \ldots, A_l)$, где $A_j : \mathfrak{I}_{ob} \times \mathfrak{I}_{cl} \to \widetilde{\mathfrak{I}}$ при $j \in \{A_1, \ldots, A_l\}$. Однако такое сведение возможно не во всех случаях (например, оно некорректно, если решается задача с непересекающимися классами).

Еще более сложный случай представляет собой ситуация, когда имеется информация, относящаяся одновременно и к объектам, и к классам. Например, на вход алгоритма может поступать экспертная оценка принадлежности объекта классу или «расстояние» от объекта до «центра тяжести» класса и т.п. В таких случаях необходимо вводить пространство $\mathfrak{I}$ совокупных информаций об объектах и классах и ставить задачу построения алгоритма вида $A : \mathfrak{I}^l \to \widetilde{\mathfrak{I}}^l$.

Наконец, возможны ситуации, когда требуется совместное рассмотрение групп, состоящих из p объектов при фиксированном или произвольном p. Такие случаи возникают, например, если известно, что некоторый класс одноэлементен или что вхождение объекта в класс зависит от состава группы, в которую этот объект входит, и т.п. В этих ситуациях алгоритм должен реализовывать отображения вида

$$A : (\mathfrak{I}^l)^p \to (\widetilde{\mathfrak{I}}^l)^p$$

или

$$A : \Big(\bigcup_{p=1}^{\infty}(\mathfrak{I}^l)^p\Big) \to \Big(\bigcup_{p=1}^{\infty}(\widetilde{\mathfrak{I}}^l)^p\Big).$$

[1]Здесь и далее мы часто не будем различать алгоритмы и реализуемые ими отображения.

Отметим, что описанные случаи не исчерпывают, конечно, всего разнообразия потенциально возможных ситуаций. В то же время они соответствуют большинству построений и исследований в области решения задач классификации.

Перейдем теперь к основной проблеме синтеза алгоритмов. Этот синтез, как уже говорилось, осуществляется на базе структурной информации, т.е. информации о том, каким должно быть отображение, реализуемое искомым алгоритмом. Крайне характерной частью структурной информации оказываются при этом описания прецедентов. Для задач классификации такие описания представляют собой информацию о наборе допустимых объектов $(S_1, \ldots, S_q) \in \mathfrak{I}^q$, называемом контрольной выборкой, и сопоставленный этому набору набор векторов $(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_q)$ из множества $(\widetilde{\mathfrak{I}}^l)^q$. Векторы $\bar{\alpha}_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{il}) \in \widetilde{\mathfrak{I}}^l$ называются информационными векторами объектов S_i (при $i \in \{1, \ldots, q\}$), величины α_{ij} интерпретируются как описания соотношений $S_i \in K_j$ на языке $\widetilde{\mathfrak{I}}$.

Использование прецедентной части структурной информации сводится к тому, что от искомого алгоритма A требуется, чтобы для выборки $(S_1, \ldots, S_q)$ он порождал финальную информацию $(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_q)$. Это условие можно записать в виде равенства, для чего удобно использовать наиболее общий из описанных выше вариантов «рабочего режима» и два дополнительных понятия — матрицу информации и информационную матрицу задачи.

Итак, будем считать, что определено пространство $\mathfrak{I}$, элементы которого суть допустимые совместные описания объектов и классов. При наличии выборки $(S_1, \ldots, S_q)$, естественно, должны быть определены элементы I_{ij} пространства $\mathfrak{I}$, где I_{ij} — совместное описание объекта S_i и класса K_j при $i \in \{1, \ldots, q\}$ и $j \in \{1, \ldots, l\}$. Эти элементы I_{ij} объединяются в матрицу $\widehat{I} = \|I_{ij}\|_{q\times l}$[2], называемую матрицей информации для рассматриваемой задачи. Финальную информацию, т.е. набор векторов $(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_q)$, также удобно записывать в виде матрицы $\widehat{\widehat{I}} = \|\alpha_{ij}\|_{q\times l}$, называемой информационной матрицей задачи. Теперь условие, выражающее прецедентную часть структурной информации, может быть записано в виде равенства

$$A(\widehat{I}) = \widehat{\widehat{I}}. \tag{0.2.1}$$

В качестве примера рассмотрим вышеупомянутое семейство алгоритмов вычисления оценок. Эти алгоритмы предназначены для решения задач классификации, в которых $\mathfrak{S} = \mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n$, где $\mathcal{M}_t$ при $t \in \{1, \ldots, n\}$ — пространства с полуметриками ρ_t. Предполагается, что в $\mathfrak{S}$ выделены объекты $S^1, \ldots, S^m$, называемые объектами обучения[3]. В качестве множества допустимых описаний $\mathfrak{I}_{ob}$ используется пространство $q \times l$-матриц, элементами которых являются неотрицательные действительные числа, т.е. в этом случае

[2]Матрицы в работе обозначаются символами с «шапочками». В некоторых случаях для определенности применяется запись типа $\|a_{ijk}\|^{ik}_{m\times n}$, что означает матрицу

$$\left\| \begin{array}{ccc} a_{1j1} & \ldots & a_{1jn} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{mj1} & \ldots & a_{mjn} \end{array} \right\|_{m\times n}.$$

[3]Для объектов обучения используются верхние индексы, для контрольных объектов — нижние.

$\mathfrak{I}_{ob} = \mathfrak{C}_{m,n}(\mathbb{R}_+)$[4]. Функция D, сопоставляющая допустимым объектам их описания, определяется при этом равенством $D(S) = \left\|\rho_t(S, S^k)\right\|^{kt}_{m\times n}$, так что описанием объекта S оказывается совокупность расстояний от него до всех объектов обучения $S^1, \dots, S^m$. С помощью объектов обучения описываются и классы $K_1, \dots, K_l$: информацией о любом классе K_j при $j \in \{1, \dots, l\}$ является булев вектор $(P_j(S^1), \dots, P_j(S^m))$, где P_j — соответствующий классу K_j предикат вхождения. Таким образом, в данном случае $\mathfrak{I} = \mathfrak{C}_{m,n}(\mathbb{R}_+) \times \{0,1\}^m$. Из сказанного вытекает, что элементы I_{ij} матрицы информации $\widehat{I}$ имеют вид

$$I_{ij} = \Big(\left\|\rho_t(S_i, S^k)\right\|^{kt}_{m\times n},\ P_j(S^1), \dots, P_j(S^m)\Big) \qquad (0.2.2)$$

при $i \in \{1, \dots, q\}$ и $j \in \{1, \dots, l\}$. Сами алгоритмы вычисления оценок, исчерпывающе описанные в упомянутых выше работах, будут подробно расссматриваться в гл. 5. Сейчас же достаточно отметить, что в наиболее известном варианте они реализуют отображения элементов пространства $\mathfrak{I}$ в множество $\widetilde{\mathfrak{I}} = \{0, 1, \Delta\}$ или в $\widetilde{\mathfrak{I}} = \{0, 1\}$. При этом алгоритмы строятся как суперпозиции так называемых распознающих или алгоритмических операторов B и решающих правил C. Алгоритмические операторы реализуют отображение элементов пространства $\mathfrak{I}$ в $\mathbb{R}$, т.е. вычисляют по наборам вида (0.2.2) некоторые действительные числа, называемые оценками. Решающие правила преобразуют оценки в «ответы» 0 и 1 или в 0, 1 и Δ (как правило используются пороговые решающие правила вида $C(x) = 1$ при $x \geqslant a$, $C(x) = 0$ при $x \leqslant b$ и $C(x) = \Delta$ при $b < x < a$, где a и b — числовые параметры, $a > b$).

Если рассмотреть отдельно процесс синтеза конкректных алгоритмов вычисления оценок, то он сведется к выбору значений параметров, обеспечивающих выполнение равенства (0.2.1). При этом можно считать, что алгоритмический оператор B переводит матрицу информации $\widehat{I} \in \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I})$ в матрицу оценок $B(\widehat{I}\,) \in \mathfrak{C}_{q,l}(\mathbb{R})$, а решающее правило C преобразует матрицу $B(\widehat{I}\,)$ в $C(B(\widehat{I}\,)) \in \mathfrak{C}_{q,l}(\widetilde{\mathfrak{I}})$.

Проблема выбора значений параметров, обеспечивающих выполнение равенства (0.2.1), является чрезвычайно сложной и с теоретической, и с практической точек зрения. Достаточно сказать, что до сих пор неизвестно точное описание множества задач, разрешимых в рамках семейства алгоритмов вычисления оценок, т.е. задач, для которых вообще существуют значения параметров, обеспечивающие решение. В результате при работе с практическими проблемами часто приходится ограничиваться значениями параметров, при которых равенство (0.2.1) выполняется лишь приближенно.

Итак, семейство алгоритмов вычисления оценок определяется как семейство суперпозиций алгоритмических операторов вычисления оценок и решающих правил. В [54] и в [57] было показано, что такая конструкция имеет в некотором смысле универсальный характер, т.е. что представление алгоритмов в виде суперпозиций алгоритмических операторов и решающих правил возможно не только в случае АВО, но и для практически

[4]Здесь и далее во всей работе без дополнительных оговорок символ $\mathfrak{C}_{a,b}(\mathfrak{U})$ используется для обозначения пространства $a \times b$-матриц над множеством $\mathfrak{U}$; $\mathbb{R}_+$ — для обозначения множества неотрицательных действительных чисел.

всех других семейств алгоритмов классификации. Это обстоятельство и позволило ввести основные конструкции алгебраического подхода.

В общем случае рассматривалось семейство алгоритмов $\mathfrak{M} \subseteq \{ A \mid A : \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I}) \to \to \mathfrak{C}_{q,l}(\widetilde{\mathfrak{I}}) \}$, определенное как семейство суперпозиций

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0 = \{ C \circ B \mid C \in \mathfrak{M}^1,\ B \in \mathfrak{M}^0 \},$$

где $\mathfrak{M}^0 \subseteq \{ B \mid B : \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I}) \to \mathfrak{C}_{q,l}(\mathbb{R}) \}$ — семейство отображений, называемых алгоритмическими или распознающими операторами, и $\mathfrak{M}^1 \subseteq \{ C \mid C : \mathfrak{C}_{q,l}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{C}_{q,l}(\widetilde{\mathfrak{I}}) \}$ — семейство отображений, называемых решающими правилами. Такая конструкция позволяет реализовать идею о совместном использовании нескольких алгоритмов при решении единственной задачи путем применения так называемых корректирующих операций.

В качестве основного семейства корректирующих операций в [54–57] рассматривалось семейство L линейных операций над пространством действительных матриц $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathbb{R})$. Действие этих операций распространялось на семейство всех отображений B из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathbb{R})$:

$$(aB_1 + bB_2)(\widehat{I}\,) = aB_1(\widehat{I}\,) + bB_2(\widehat{I}\,) \tag{0.2.3}$$

для всех $B_1, B_2 : \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I}) \to \mathfrak{C}_{q,l}(\mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\widehat{I} \in \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I})$. В результате возникала возможность при решении задач использовать не исходную модель алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$, а совокупность $L(\mathfrak{M}^0)$ всех линейных комбинаций операторов из $\mathfrak{M}^0$ — множество операторов

$$\Big\{ \sum_{r=1}^{p} a_r B_r \;\Big|\; a_r \in \mathbb{R},\ B_r \in \mathfrak{M}^0,\ r \in \{1, \ldots, p\},\ p \in \mathbb{N} \Big\},$$

т.е. вместо семейства алгоритмов $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0$ применять более широкое семейство алгоритмов $L(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}^1 \circ L(\mathfrak{M}^0)$. Таким образом были впервые продемонстрированы две характерные особенности алгебраического подхода: синтез операций над алгоритмами на основе операций над матрицами оценок и использование корректирующих операций для получения расширений исходных семейств алгоритмов.

Естественно, что расширение применяемых семейств алгоритмов может привести к расширению множества разрешимых задач, т.е. задач, для которых в рамках семейства в принципе можно найти точное решение. Однако при возрастании «объема» семейства обычно возрастает и сложность решения задачи выбора в рамках семейства алгоритма, оптимального для конкретной задачи. По-видимому наиболее важная особенность алгебраического подхода состоит в том, что при использовании надлежащим образом выбранных способов построения расширений сложность синтеза оптимальных алгоритмов в рамках расширения оказывается даже ниже, чем в случае исходной «нерасширенной» модели. Во многих же случаях уже на уровне теоретического анализа возможно получение явных формул, определяющих решения конкретных задач. Нашей ближайшей целью будет краткий обзор конструкций, обеспечивающих эту особенность алгебраического подхода.

Истоком для описываемых результатов служит очевидное замечание: линейная оболочка любого содержащего линейный базис подмножества пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathbb{R})$ совпадает с самим пространством $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathbb{R})$. Отсюда вытекает, что если для задачи с матрицей информации $\widehat{I}$ множество $\mathfrak{M}^0(\widehat{I})$ содержит линейный базис, то для семейства $L(\mathfrak{M}^0)$ выполнено равенство $L(\mathfrak{M}^0)(\widehat{I}) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathbb{R})$. Теперь ясно, что даже если в качестве семейства решающих правил $\mathfrak{M}^1$ использовать одноэлементное множество $\{C_0\}$ такое, что C_0 — отображение $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathbb{R})$ на $\mathfrak{C}_{q,l}(\widetilde{\mathfrak{I}})$, т.е. сюръекция, то при $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^1 \circ L(\mathfrak{M}^0)$ будет выполнено равенство $\mathfrak{M}(\widehat{I}) = \mathfrak{C}_{q,l}(\widetilde{\mathfrak{I}})$ и, следовательно, в $\mathfrak{M}$ найдется алгоритм A такой, что $A(\widehat{I}) = \widehat{\widehat{I}}$, где $\widehat{\widehat{I}}$ — информационная матрица рассматриваемой задачи. Несмотря на внешнюю простоту этого рассуждения, оно имеет целый ряд весьма глубоких следствий и, видимо, может быть признано фундаментом многих конструкций алгебраического подхода.

Например, важнейшим следствием является то, что применение техники расширений резко снижает требования к «объему» исходного семейства алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$ и упрощает решение проблемы выбора значений параметров при анализе конкретных задач. Действительно, для разрешимости задачи с матрицей информации $\widehat{I}$ оказывается достаточным, чтобы в $\mathfrak{M}^0(\widehat{I})$ содержался любой из линейных базисов пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathbb{R})$, а выбор значений параметров достаточно осуществить таким образом, чтобы ими были определены алгоритмические операторы $B_1, \dots, B_{ql}$ такие, чтобы соответствующие матрицы $B_1(\widehat{I}), \dots, B_{ql}(\widehat{I})$ составляли линейный базис пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathbb{R})$.

Далее, существенно, что оказывается возможным описать широкие классы задач (точнее — матриц информации $\widehat{I}$, определяющих задачи) такие, что в $\mathfrak{M}^0(\widehat{I})$ содержится линейный базис пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathbb{R})$. Эти задачи называются регулярными[5]. Таким образом для многих случаев удается получить решение проблемы разрешимости, которая является очевидным следствием регулярности (если $\mathfrak{M}\ (\widehat{I}) = \mathfrak{C}_{q,l}(\widetilde{\mathfrak{I}})$, то при произвольной информационной матрице $\widehat{\widehat{I}}$ в $\mathfrak{M}$ содержится алгоритм A такой, что $A(\widehat{I}) = \widehat{\widehat{I}}$).

Оказывается возможным также практически не рассматривать решающие правила, постулировав, что используется единственное решающее правило C_0, реализующее сюръективное отображение $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathbb{R})$ на $\mathfrak{C}_{q,l}(\widetilde{\mathfrak{I}})$ (такие решающие правила называются корректными).

Наконец, важно, что для многих регулярных задач существуют процедуры построения базисных алгоритмических операторов $B_1, \dots, B_{ql}$, что позволяет по сути дела в явном виде выписывать решения таких задач, избегая применения сложных процедур оптимизации.

Еще раз отметим, что описанные идеи и конструкции были предложены Ю. И. Журавлевым в [54–57]. В этих и других вышеупомянутых работах, выполненных в рамках алгебраического подхода, в качестве $\mathfrak{M}^0$ рассматривались различные варианты алгоритмических операторов вычисления оценок (Г-модели), алгоритмические операторы, основанные на принципе разделения (R-модели) и потенциалов (П-модели). Кроме того, в качестве семейства корректирующих операций рассматривались расширения L — семейства $\mathfrak{A}^n$ и LM, где $\mathfrak{A}^n$ — множество полиномов степени не выше n с умножением матриц по Адамару ($\|a_{ij}\|_{q\times l} \times \|b_{ij}\|_{q\times l} = \|a_{ij}b_{ij}\|_{q\times l}$), а LM — множество, получаемое добавлением

[5]Более точное и общее определение регулярности обсуждается в §5 гл. 1.

к L оператора Max ($Max\|a_{ij}\|_{q\times l} = \|b_{ij}\|_{q\times l}$, где $b_{ij} = 1$ если a_{ij} — максимальный элемент матрицы $\|a_{ij}\|_{q\times l}$ и $b_{ij} = 1$ в противном случае). При этом использование семейств корректирующих операций проводилось путем построения в рамках расширений $\mathfrak{A}^n(\mathfrak{M}^0)$ или $LM(\mathfrak{M}^0)$ базисных алгоритмических операторов $B_1, \ldots, B_{ql}$.

Важно отметить, что применение алгебраических конструкций получило обоснование на базе принятия некоторых дополнительных весьма общих метрических и статистических гипотез. Работы первого типа были выполнены Ю. И. Журавлевым и его учениками, а построения второго типа, потребовавшие создания специального тонкого математического аппарата, были проведены В.Л.Матросовым [103–110].

Итак, в описанных в настоящем параграфе работах были развиты исходные концепции алгебраического подхода и получены принципиально важные результаты. Среди них, суммируя, можно отметить: использование корректирующих операций для синтеза расширений моделей алгоритмических операторов и алгоритмов в целом; исследование регулярности как свойства задач, обеспечивающего разрешимость; создание техники, позволяющей проводить автономные исследования семейств алгоритмических операторов и решаюших правил; синтез экстремальных по качеству алгоритмов без решения сложных задач оптимизации. Отметим в заключение еще раз, что содержание данного параграфа представляет собой не претендующий на полноту краткий обзор, необходимый лишь для того, чтобы объяснить ниже, как возникли вопросы, для ответа на которые была разработана теория универсальных и локальных ограничений для алгоритмов распознавания.

0.3 О причинах создания теории универсальных и локальных ограничений

Целью настоящего параграфа является рассмотрение вопросов и проблем, которые возникли на первом этапе развития алгебраического подхода и поиск ответов на которые привел к излагаемому в данной работе комплексу построений и результатов.

Остановимся прежде всего на основном обстоятельстве, которое породило исходную для теории универсальных и локальных ограничений проблему. Это обстоятельство состоит в том, что при решении очень многих задач явно недостаточно рассматривать только прецедентную информацию в качестве единственного фактора, определяющего синтез алгоритма — решения. Данное соображение становится особенно актуальным в контексте алгебраического подхода, поскольку универсальность его конструкций позволяет при недостаточно точной постановке задачи с легкостью получать формально правильные, но явно бессмысленные с содержательной точки зрения результаты.

Действительно, выше уже говорилось, что, например, в задачах классификации прецедентная информация полностью описывается парой матриц $(\widehat{I}_0, \widehat{\widehat{I}}_0)$, где $\widehat{I}_0$ — матрица информации и $\widehat{\widehat{I}}_0$ — информационная матрица задачи. Если теперь ограничиться лишь требованием, чтобы искомый алгоритм A реализовывал отображение из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}(\widetilde{\mathfrak{I}})$

такое, что $A(\widehat{I}_0) = \widehat{\widehat{I}}_0$, то формально правильным решением окажется алгоритм A_0, который для всех $\widehat{I}$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I})$ порождает $\widehat{\widehat{I}}_0$, т.е. реализует константу. Ясно, что удовлетворительная с содержательной точки зрения точная постановка исходной задачи должна «запрещать» подобные решения, т.е. должна содержать дополнительные по отношению к прецедентным ограничения на вид отображений, которые могут реализовываться искомыми алгоритмами.

Из вышесказанного вытекает, что прежде всего было необходимо уточнение постановки задач синтеза алгоритмов классификации путем включения в эту постановку в явном виде дополнительных по отношению к прецедентным ограничений на допустимые отображения (корректные алгоритмы). Естественно, при этом требовалось разработать специальный язык (в широком смысле слова) для описания таких ограничений как способа выражения структурной информации, т.е. реальной информации, определяющей необходимые свойства синтезируемого алгоритма.

Существенным оказалось также выяснение соотношения между прецедентной и дополнительной к ней информацией, выраженной на языке формальных ограничений на вид допустимых отображений.

Отметим далее, что в исходных работах алгебраического подхода критерии регулярности задач (т.е. описания задач, которые априори могут быть решены с помощью соответствующих алгебраических конструкций) имели характер лишь достаточных, но не необходимых условий, формировавшихся в результате анализа конкретных моделей алгоритмов и семейств корректирующих операций. Результатом этого было то, что если при решении конкретной задачи выяснялось, что она не регулярна, то оставался открытым вопрос: является ли отсутствие регулярности следствием некорректной постановки задачи (например, из-за ошибок в прецедентной информации) или же оно обусловлено неудачно выбранным или построенным семейством алгоритмических операторов и/или корректирующих операций? Отсюда вытекала необходимость исследований, которые могли бы позволить выводить необходимые и достаточные условия регулярности непосредственно из анализа реальной информации, а не постулировать их как ограничения для отдельных конкретных моделей алгоритмов и семейств корректирующих операций.

В предыдущем параграфе говорилось, что использование исходных результатов алгебраического подхода позволило проводить автономные исследования расширений моделей алгоритмических операторов и семейств решающих правил. В то же время оставался открытым вопрос о возможности изучения по-отдельности моделей алгоритмических операторов и семейств корректирующих операций, применяемых для их расширения. Актуальность этого вопроса становится особенно ясной, если предположить, что для рассматриваемого расширения модели алгоритмических операторов регулярными оказалось «слишком мало» задач. В такой ситуации, естественно, требуется установить, которое из множеств отображений (модель алгоритмических операторов или семейство корректирующих операций) необходимо расширить или вообще заменить, чтобы класс регулярных задач оказался адекватным.

С предыдущим вопросом непосредственно связана проблема использования в качестве семейств корректирующих операций произвольных множеств операций над пространством $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathbb{R})$ и даже, более широко, над $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{R})$ при произвольном пространстве $\mathfrak{R}$. Действительно, применение только линейных операций и умножения по Адамару можно, видимо, признать удачным техническим приемом, однако трудно считать единственно возможным вариантом во всех случаях.

Последняя проблема связана с тем, что сами по себе и модели алгоритмических операторов, и семейства корректирующих операций, и решающие правила — все они имеют чисто эвристическое происхождение. Иными словами, эти семейства изначально определяются только здравым смыслом и богатством фантазии исследователей. Это обстоятельство порождает и вопрос, который можно сформулировать, например, так: нельзя ли, «слегка» изменив (расширив) одно из используемых семейств отображений, существенно расширить класс регулярных задач, т.е. существенно повысить «мощность» всей конструкции. Или же, наоборот, вопрос можно поставить так: можно ли упростить (сузить) применяемые семейства, сохраняя при этом класс регулярных задач неизменным?

Отметим, наконец, что, хотя задачи классификации весьма универсальны по постановке, но все же ими не исчерпывается все разнообразие задач синтеза алгоритмов преобразования информации. В исходных результатах и концепциях алгебраического подхода, полученных для задач классификации, содержались основные принципы, пригодные для анализа задач в указанном более общем случае. Желание расширить границы применимости идей алгебраического подхода также было одной из причин разработки теории универсальных и локальных ограничений.

0.4 Обзор основных конструкций, результатов и выводов теории универсальных и локальных ограничений

Исходной целью исследований, результаты которых представлены в настоящей работе, было создание языка, пригодного для описания точной постановки задач классификации, распознавания, прогнозирования и т.п., т.е. в общем случае — задач преобразования информации. Основными при этом были следующие соображения: при решении отдельных задач или классов задач «внешними» по отношению к математическому аппарату соображениями и обстоятельствами определяются множества $\mathfrak{I}_i$ начальных и $\mathfrak{I}_f$ финальных информаций, т.е. множества потенциально возможных входных и выходных данных для искомого алгоритма (алгоритм должен реализовывать отображение из $\mathfrak{I}_i$ в $\mathfrak{I}_f$); структурная информация, т.е. информация о том, каким условиям должен удовлетворять искомый алгоритм, может быть выражена в виде системы ограничений, которым должно удовлетворять реализуемое алгоритмом отображение. Таким образом, искомый язык должен представлять собой средство для описания и исследования ограничений на множества отображений из пространства $\mathfrak{I}_i$ в пространство $\mathfrak{I}_f$.

Ранее уже говорилось, что в случае задач классификации прецедентная информация представляется в виде ограничения, выражаемого равенством (0.2.1). Помимо этого ограничения может использоваться дополнительная информация об общих свойствах отображений, которые должны реализовывать искомые алгоритмы. Такая информация может, например, выражаться условием типа «все рассматриваемые объекты однородны и данные о них независимы» и т.п.

При алгебраическом подходе существенное различие между прецедентными и общими ограничениями состоит в том, что первые жестко связаны с пространствами $\mathfrak{I}_i$ и $\mathfrak{I}_f$ и потому рассматриваются и используются лишь для «целых» алгоритмов. Вторые же могут применяться не только к «целому» алгоритму, но и по-отдельности к алгоритмическим операторам, корректирующим операциям и решающим правилам.

Крайне важно при этом, что прецедентные ограничения «конечны», т.е. если предположить, что искомый алгоритм построен как «черный ящик», то за конечное число шагов можно установить, удовлетворяет ли реализуемое алгоритмом отображение этим ограничениям. Дополнительные к прецедентным ограничения общего характера могут в принципе и не допускать такой эффективной проверки. Отсюда вытекает, что такие ограничения не только могут, но и с необходимостью должны использоваться при выборе или синтезе составляющих искомый алгоритм алгоритмических операторов, корректирующих операций и решающего правила, чтобы «целый» алгоритм удовлетворял этим ограничениям «по построению».

Именно в силу их общего характера обсуждаемые ограничения были названы универсальными. Отметим, что вышесказанное относится не только к задачам и алгоритмам классификации, но и к общим задачам синтеза алгоритмов преобразования информации.

По самой своей сути прецедентные ограничения представляют теоретический интерес только лишь в связи и по отношению к дополнительным ограничениям. В силу этого именно универсальные ограничения оказываются основным предметом рассмотрения. Для их описания в работе развивается подход, при котором в качестве формального эквивалента понятия «система универсальных ограничений» используются некоторые специальные категории и изучение универсальных ограничений сводится таким образом к изучению таких категорий.

Существенно, что введение понятия универсальных ограничений позволяет провести необходимое уточнение постановки задач: рассматриваются задачи, в которых исходная информация состоит из двух равноправных частей, выраженных в виде универсальных и локальных (прецедентных) ограничений. Это позволяет исследовать проблему регулярности и разрешимости задач как проблему корректности постановки, т.е. непротиворечивости универсальной и локальной частей имеющейся информации. В работе поведено это исследование и получен общий необходимый и достаточный критерий регулярности.

Описанный и остальные «внешние» результаты работы базируются на едином математическом аппарате исследования универсальных ограничений и их связи с локальными ограничениями. Развитию такого аппарата посвящены основные технические построения.

Он основан на введении и изучении так называемых баз категорий, выражающих универсальные ограничения (понятие базы аналогично понятию множества в линейном векторном пространстве, линейная оболочка которого совпадает со всем пространством, только вместо линейных операций рассматриваются соответствующие множества морфизмов).

Основные построения в работе проведены на трех различных уровнях общности. Во-первых, рассмотрены общие задачи синтеза алгоритмов преобразования информации. Во-вторых, получены результаты для общих задач классификации и, в частности, для задач классификации со стандартной информацией. Наконец, в-третьих, выделены и исследованы два конкретных класса универсальных ограничений (симметрические и функциональные ограничения) и их изучение доведено до результатов, непосредственно приложимых к конкретным задачам и семействам отображений. При этом, конечно, проявляется общая закономерность: чем менее общая ситуация рассматривается, тем более богатый спектр результатов удается получить.

Итак, первым «выходом» теориии универсальных и локальных ограничений оказывается общий необходимый и достаточный критерий регулярности задач классификации, который с использованием технических результатов сводится для отдельных конкретных систем универсальных ограничений (категорий) к легко проверяемым на практике условиям.

Следующим объектом изучения оказываются, естественно, модели алгоритмов, т.е. семейства отображений из $\mathfrak{I}_i$ в $\mathfrak{I}_f$. Учитывая, что такие модели разрабатываются для решения целых классов задач, их приходится рассматривать в ситуации, когда зафиксирована некоторая система универсальных ограничений. Для такого случая оказывается возможным получение критерия полноты моделей алгоритмов. Модель, обладающая свойством полноты, допускает решение в своих рамках всех регулярных задач с данной системой универсальных ограничений и, таким образом, оказывается в этом смысле принципиально неулучшаемой в классе моделей алгоритмов, удовлетворяющих этим универсальным ограничениям. Критерии полноты для моделей алгоритмов, как и остальные критерии, о которых будет идти речь, получены в работе как на общем уровне, так и для конкретных систем универсальных ограничений.

Важно отметить, что свойство полноты моделей алгоритмов целиком определяется рассматриваемой системой универсальных ограничений, т.е. в конечном счете — изучаемым классом задач. Поэтому и возникает возможность утверждать, что полные модели являются в точном смысле слова экстремальными объектами: любые изменения и расширения таких моделей (не нарушающие, конечно, универсальные ограничения) не могут привести к расширению множества регулярных задач. Это же замечание относится и к обсуждаемым ниже полным моделям алгоритмических операторов и семействам корректирующих операций.

Поскольку алгоритмы при алгебраическом подходе строятся как суперпозиции алгоритмических операторов, корректирующих операций и решающих правил, то из критерия полноты моделей алгоритмов оказывается возможным вывести и соответствующие отдельные критерии для семейств таких отображений. Именно таким образом в работе получены критерии полноты для моделей алгоритмических операторов и семейств корректирующих операций, а также понятие корректности семейств решающих правил.

Итак, для каждой системы универсальных ограничений возникает система взаимосвязанных определяющих экстремальные свойства критериев для отдельных семейств отображений, участвующих в формировании искомых алгоритмов. При этом критерии оказываются не только достаточными, но и необходимыми условиями, что обеспечивает окончательность получаемых на их базе результатов в конкретных ситуациях.

Представляется также важным, что наличие отдельных критериев для моделей алгоритмических операторов и семейств корректирующих операций обеспечивает возможность их автономного исследования. Отметим также, что результаты для корректирующих операций получены для произвольных пространств оценок и произвольных же семейств таких операций (линейные и полиномиальные операции можно рассматривать как частные случаи).

В работе введены и изучены классы симметрических и функциональных универсальных ограничений для алгоритмов классификации. Эти классы характеризуются тем, что допускают достаточно детальное исследование и, в то же время, являются весьма общими в том смысле, что полученные для них результаты оказываются достаточными для изучения большинства ранее рассматривавшихся классов задач и алгоритмов. Изучение симметрических и функциональных ограничений позволило разработать конкретные схемы исследования моделей алгебраических операторов и семейств корректирующих операций. Применение таких схем привело к новым доказательствам некоторых ранее известных конкретных фактов и к получению серии новых результатов об отдельных моделях алгоритмов и семействах корректирующих операций.

В частности, описанным способом были исследованы структуры подмоделей R-, П- и Г-моделей алгоритмических операторов и в этих структурах были выделены минимальные по сложности подмодели, обладающие свойством полноты. Таким же образом была получена точная универсальная граница степени полиномиальных семейств корректирующих операций. Эти результаты можно, видимо, считать косвенным следствием теории универсальных и локальных ограничений, поскольку их появление в большой степени обусловлено тем, что применение найденных в рамках теории критериев полноты оказывается по сути дела техническим упражнением (ранее, скажем, исследование любой подмодели каждой из рассмотренных моделей было достаточно сложной работой). Так что можно сказать, что именно простота использования критериев полноты позволяет ставить и получать ответы на вопрос о минимальной необходимой сложности семейств алгоритмических операторов и корректирующих операций.

Понятие регулярности и непосредственно связанные с ним понятия полноты используются в алгебраическом подходе преимущественно для анализа проблемы разрешимости. В настоящей работе предложен общий взгляд на этот аспект алгебраического подхода, позволяющий рассматривать регулярность и разрешимость в рамках некоторой единой схемы. Кроме того, проведено сравнительное изучение регулярности и разрешимости задач с симметрическими и функциональными универсальными ограничениями. При этом выясняется несколько неожиданный факт: несмотря на то, что критерии регулярности для симметрического и функционального случаев чрезвычайно близки, оказывается, что для разрешимости результаты качественно различны.

Использование полных семейств алгоритмических операторов и корректирующих операций совместно с произвольным корректным решающим правилом гарантирует построение полного семейства алгоритмов. При этом, однако, оказывается, что верны следующие три утверждения:

- если модель алгоритмических операторов не полна, то и модель алгоритмов не полна;
- если решающее правило не корректно, то модель алгоритмов не полна;
- из того, что семейство корректирующих операций не полно, не вытекает, вообще говоря, неполнота модели алгоритмов.

Последнее можно объяснить тем, что семейство алгоритмических операторов с самого начала может оказаться настолько богатым, что применение в полном объеме семейства корректирующих операций, расширяющего по сути дела модель алгоритмических операторов, может оказаться не нужным. Это обстоятельство позволяет рассматривать важный вопрос о возможности синтеза в частных случаях полных семейств алгоритмов с использованием неполных семейств корректирующих операций.

Из вышесказанного легко заключить, что обоснование использования неполных семейств корректирующих операций должно базироваться на наложении более жестких чем полнота требований на модели алгоритмических операторов. В работе проведено конкретное исследование такого типа, позволившее установить пониженную точную границу степени полиномиальных расширений для широкого класса моделей алгоритмических операторов, включающего, например, АВО. Следует отметить, что важные результаты о степенях полиномиальных расширений были ранее получены в [105, 107, 119].

Итак, в рамках теории универсальных и локальных ограничений удается получить ответы на вопросы, поставленные в предыдущем параграфе: уточняется постановка задач; устанавливаются необходимые и достаточные критерии регулярности зависящие от исходной реальной информации; выводятся критерии полноты, позволяющие проводить автономные исследования всех используемых при синтезе алгоритмов семейств отображений; обеспечивается возможность использования произвольных семейств корректирующих операций; решается проблема влияния вариаций используемых эвристических семейств на их применимость для решения задач; область приложения идей алгебраического подхода расширяется до уровня общих задач синтеза алгоритмов преобразования информации.

0.5 Содержание работы по главам

В главе 1 рассматривается вопрос о постановке задач распознавания как частного случая общих задач преобразования информации. При этом выделяются задачи классификации и задачи классификации со стандартным способом формирования информации. Далее подробно обсуждается способ решения задач синтеза алгоритмов, основанный на построении расширений заданных параметрических семейств отображений, т.е. на основной конструкции алгебраического подхода.

После описания и обсуждения постановок задач распознавания как задач синтеза алгоритмов, реализующих отображения, удовлетворяющие ограничениям, в виде которых представлена вся имеющаяся реальная информация о проблемной области, проводится на содержательном уровне обсуждение свойств таких ограничений, обеспечивающих возможность применения конструкций алгебраического подхода.

Далее рассматривается центральный для алгебраического подхода вопрос о разрешимости, причем описывается конструкция, позволяющая изучать целый спектр различных понятий разрешимости (регулярности), возникающих при формализации тех или иных дополнительных требований к процессу решения задач.

Глава 1 завершается уточняющим содержание параграфа 0.3 обзором основных проблем алгебраического подхода, решаемых в рамках теории универсальных и локальных ограничений.

В главе 2 вводится и изучается главное для настоящей работы понятие — система универсальных ограничений. Это понятие описывается сначала на содержательном уровне, потом проводится соответствующая формализация и рассматриваются свойства полученных объектов — допустимых категорий.

Введенные для общих задач преобразования информации универсальные ограничения далее изучаются более подробно для алгоритмов классификации, причем с учетом ставшего классическим при алгебраическом подходе понятия регулярности задач. Это приводит к необходимости введения дополнительного свойства универсальных ограничений, необходимого для адекватного изучения проблемы разрешимости. Это свойство (полнота категорий) в сочетании со свойством допустимости также рассматривается в главе 2.

Глава завершается примерами систем универсальных ограничений.

Третья глава посвящена подробному рассмотрению конструкций и результатов, относящихся к анализу постановок задач классификации и семейств алгоритмов (отображений), используемых для их решения. В этой главе получены основные общие результаты работы — критерии регулярности задач и полноты моделей алгоритмов, алгоритмических операторов и корректирующих операций. При этом рассмотрение проведено сначала на абстрактном уровне путем изучения свойств определенных семейств отображений, а потом установлена связь полученных результатов с процессом решения задач классификации.

В главе 4 описаны и изучены два важных конкретных класса универсальных ограничений для задач и алгоритмов классификации — системы симметрических и функциональных ограничений. При этом их изучение доведено до уровня, обеспечивающего возможность непосредственного использования полученных критериев при исследовании реально используемых для решения прикладных задач моделей алгоритмов.

Глава 5 демонстрирует методику применения результатов теории универсальных и локальных ограничений на примерах изучения наиболее известных моделей алгоритмических операторов и семейств корректирующих операций. При этом возникают как новые доказательства ранее известных фактов об этих семействах, так и новые результаты, причем имеющие окончательный характер.

В главе 6 приведены дополнительные результаты о рассмотренных в предыдущих главах системах универсальных ограничений, уточняющие связь между понятиями разрешимости и регулярности, продемонстрирована возможность изучения и использования неполных семейств корректирующих операций (что позволяет установить пониженную границу необходимой степени для операторов полиномиального типа) и рассмотрены в рамках основных конструкций два важных семейства задач и алгоритмов, не входящих в подробно изученные в предыдущих главах классы.

Благодарности

Автор выражает глубокую признательность всем своим коллегам — специалистам в области теории распознавания из отдела проблем распознавания и методов комбинаторного анализа ВЦ АН СССР и других научных организаций за доброжелательное и в то же время конструктивно-критическое отношение к его результатам, что в особенности стимулировало осмысливание содержательных обоснований введенных конструкций. Чувство глубочайшей благодарности автор выражает своему Учителю со студенческих лет члену-корреспонденту АН СССР Юрию Ивановичу Журавлеву, который, заложив основы алгебраического подхода, с неизменным тактом и вниманием относился к попыткам автора ставить и решать «общетеоретические» вопросы, что и привело к написанию настоящей работы.

Глава 1

Постановка задач и описание основных конструкций

1.1 Общие задачи преобразования информации и задачи классификации (постановка через ограничения)

В настоящей работе рассматривается задача синтеза алгоритмов, преобразующих начальные (исходные, входные) данные в финальные (выходные) данные. При постановке таких задач прежде всего, конечно, должны быть определены множества таких начальных и финальных данных. Обсуждая на общем уровне основные идеи алгебраического подхода, будем считать, что у рассматриваемых задач входные данные являются элементами множества $\mathfrak{I}_i$, называя это множество пространством возможных начальных информаций, а выходные — элементами множества $\mathfrak{I}_f$, называя его пространством возможных финальных информаций. Отметим, что пока для нас $\mathfrak{I}_i$ и $\mathfrak{I}_f$ — просто абстрактные множества и что обозначения $\mathfrak{I}_i$ и $\mathfrak{I}_f$ в работе используются как единые символы типа sin, max и т.п.

Постановки конкретных задач синтеза алгоритмов преобразования информации включают в себя, конечно, кроме описаний множеств $\mathfrak{I}_i$ и $\mathfrak{I}_f$ описания требований, которым должен удовлетворять искомый алгоритм. В реальных ситуациях такие требования могут относиться как к отображению из $\mathfrak{I}_i$ в $\mathfrak{I}_f$, реализуемому алгоритмом-решением, так и к особенностям собственно алгоритма, связанным, например, со свойствами конкретного вычислительного устройства, на котором он должен быть реализован. В настоящей работе будут рассматриваться случаи, когда все требования относятся только к отображению из $\mathfrak{I}_i$ в $\mathfrak{I}_f$. В связи с этим далее часто не будет делаться различия между алгоритмами и реализуемыми ими отображениями.

Множество всех отображений из $\mathfrak{I}_i$ в $\mathfrak{I}_f$ будет обозначаться символом $\mathfrak{M}_*$, т.е. $\mathfrak{M}_* = \{ A \mid A : \mathfrak{I}_i \to \mathfrak{I}_f \}$.

Итак, рассматривается задача построения алгоритма A, реализующего отображение A из $\mathfrak{I}_i$ в $\mathfrak{I}_f$, удовлетворяющее некоторой системе требований I_s.

Отметим прежде всего, что системы требований к отображениям рассматриваются как реальная информация, на базе которой должен быть построен алгоритм, причем предполагается, что никакой иной информации в нашем распоряжении нет. Информацию о требуемых свойствах алгоритма будем называть структурной в отличие от начальной (элементов $\mathfrak{I}_i$) и финальной (элементов $\mathfrak{I}_f$). Высказанное положение является особенностью подхода, в рамках которого написана данная работа, отличающей его от многих альтернативных подходов к решению задач распознавания, основанных на принятии требований к решению, вытекающих из различных дополнительных гипотез о проблемных областях.

Еще одна особенность — предположение о том, что рассматриваемые требования являются точными в следующем смысле: для каждого отображения A из $\mathfrak{M}_*$ они либо выполнены, либо нет. Отсюда вытекает, что структурная информация оказывается по сути дела описанием подмножества множества отображений $\mathfrak{M}_*$, которое будет обозначаться $\mathfrak{M}[I_s]$. Таким образом структурная информация I_s рассматривается как система ограничений, выделяющая из множества отображений $\mathfrak{M}_*$ подмножество удовлетворяющих этим ограничениям отображений $\mathfrak{M}[I_s]$.

Из вышесказанного следует, что постановки изучаемых задач сводятся к описанию множеств $\mathfrak{I}_i$ и $\mathfrak{I}_f$ и к фиксации структурной информации I_s. Отображения из $\mathfrak{M}[I_s]$ называются при этом допустимыми для соответствующей задачи, а алгоритмы, реализующие допустимые отображения, — корректными для этой задачи. Корректные алгоритмы считаются искомыми решениями.

Следует отметить, что решением признается любой алгоритм, реализующий любое допустимое отображение из подмножества $\mathfrak{M}[I_s]$. Поскольку не предполагается, что это подмножество одноэлементно, то решение, вообще говоря, не единственно (не говоря уже о том, что и конкретное допустимое отображение может быть реализовано разными алгоритмами, и все они будут корректными для данной задачи). Неединственность является естественным следствием предположения о том, что абсолютно вся реально известная информация об искомом алгоритме выражена системой ограничений I_s. Эта же информация в практических ситуациях, как правило, неполна в том смысле, что она позволяет лишь определить некоторые границы для поиска решения, но не определяет решение с абсолютной точностью.

На уровне общей постановки соотношение между обычным подходом, основанным на использовании эвристических информационных моделей, и алгебраическим подходом выглядит следующим образом. В первом случае заранее фиксируется семейство отображений (алгоритмов) $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}_*$ и в его рамках ищется отображение, принадлежащее пересечению $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}[I_s]$, либо близкое в каком-то смысле к множеству $\mathfrak{M}[I_s]$ (так что в таком случае приходится использовать дополнительные предположения о виде адекватных оценок близости или расстояний между отображениями из $\mathfrak{M}_*$). При алгебраическом же подходе регулярным и целенаправленным образом строятся расширения $\mathfrak{M}^+$ эвристической модели $\mathfrak{M}$ так, чтобы пересечение $\mathfrak{M}^+ \cap \mathfrak{M}[I_s]$ было непусто и, более того, так, чтобы в явном виде был построен алгоритм, корректный для задачи, т.е. реализующий отображение из пересечения $\mathfrak{M}^+ \cap \mathfrak{M}[I_s]$.

Расмотрим теперь более подробно задачи и алгоритмы классификации. Как уже говорилось во введении, в таких задачах изучается множество $\mathfrak{S}$, элементы S которого называются допустимыми объектами или же просто объектами. Предполагается, что в множестве $\mathfrak{S}$ имеются подмножества $K_1, \ldots, K_l$, называемые классами. Мы будем считать l произвольным фиксированным (для задачи или класса задач, что будет ясно из контекста) натуральным числом. Целью решения задачи является построение алгоритма, решающего на основе некоторой информации вопрос о принадлежности отдельных объектов или групп объектов классам. Считается также, что определены множества $\mathfrak{I}$ и $\widetilde{\mathfrak{I}}$, называемые пространствами допустимых начальных и финальных информаций соответственно. С содержательной точки зрения элементы множества $\mathfrak{I}$ представляют собой совместные описания объектов и классов, которые в процессе работы будут доступны искомому алгоритму. Элементы же множества $\widetilde{\mathfrak{I}}$ являются возможными с практической точки зрения ответами на вопрос о принадлежности объектов классам. Наконец, считается, что для всех исследуемых объектов и классов известны заранее их описания элементами множества $\mathfrak{I}$ (в некоторых случаях вопрос о формировании описаний представляет самостоятельный интерес и изучается отдельно см., например, [84], и §1.2).

Синтез алгоритмов классификации осуществляется на базе структурной информации I_s, в которую входит описание набора допустимых объектов $(S_1, \ldots, S_q)$ (контрольной выборки) и набора векторов $((\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1l}), \ldots, (\alpha_{q1}, \ldots, \alpha_{ql}))$. Векторы $(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{il})$, как уже говорилось, называются информационными векторами объектов S_i (при $i \in \{1, \ldots, q\}$), а величины α_{ij} интерпретируются как описания соотношений «$S_i \in K_j$». Использование этой части структурной информации сводится к требованию, чтобы искомый алгоритм удовлетворял равенству $A(\widehat{I}) = \widehat{\widetilde{I}}$, где $\widehat{I}$ — матрица информации рассматриваемой задачи и $\widehat{\widetilde{I}}$ — информационная матрица, т.е. $\widehat{I} = \left\|I_{ij}\right\|_{q \times l}$, где I_{ij} — элемент множества $\mathfrak{I}$, являющийся описанием i-го контрольного объекта и j-го класса, $\widehat{\widetilde{I}} = \left\|\widetilde{I}_{ij}\right\|_{q \times l}$, где $\widetilde{I}_{ij} = \alpha_{ij}$ (при $i \in \{1, \ldots, q\}$ и $j \in \{1, \ldots, l\}$).

Кроме описанной прецедентной части структурной информации I_s, в нее могут входить и дополнительные требования к отображению, реализуемому корректным алгоритмом, определяющие допустимый способ использования информации из $\mathfrak{I}_i$.

При заданных пространствах допустимых начальных и финальных информаций $\mathfrak{I}_i$ и $\mathfrak{I}_f$ пространства возможных начальных и финальных информаций для задач классификации могут быть определены различными способами (см. § 0.2). Основные построения в настоящей работе будут проводиться для случая, когда $\mathfrak{I}_i = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I})$ и $\mathfrak{I}_f = \mathfrak{C}_{q,l}(\widetilde{\mathfrak{I}})$, т.е. когда должен быть построен алгоритм, отображающий исходное пространство $q \times l$-матриц над $\mathfrak{I}$ в финальное пространство $q \times l$-матриц над $\widetilde{\mathfrak{I}}$.

Итак, рассматриваемые задачи классификации ставятся как задачи синтеза алгоритмов, реализующих отображения из пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I})$ в пространство $\mathfrak{C}_{q,l}(\widetilde{\mathfrak{I}})$, удовлетворяющие равенству $A(\widehat{I}) = \widehat{\widetilde{I}}$ и дополнительным ограничениям. Содержательная интерпретация элементов пространства $\widetilde{\mathfrak{I}}$ как описаний соотношений «$S \in K$» не является, вообще говоря, единственно возможным вариантом, так что проводимые в работе построения оказываются на самом деле применимыми для существенно более широкого, чем задачи классификации, круга задач синтеза алгоритмов преобразования информации, которые могут быть охарактеризованы как матричные задачи.

Отметим еще раз, что из самой постановки задач классификации как задач экстраполяции функций, определенных изначально в единственной точке пространства возможных начальных информаций вытекает, что для них особенно существенными являются дополнительные к прецедентным ограничения. В силу этого развиваемая ниже теория и оказывается преимущественно теорией таких ограничений.

1.2 Задачи классификации со стандартной информацией

Рассматриваемое в задачах классификации множество допустимых объектов $\mathfrak{S}$ в различных случаях бывает удобно исследовать и как множество некоторых реальных физических объектов или явлений, и как (чаще) множество некоторых описаний таких объектов. В любом случае при наличии лишь множеств $\mathfrak{S}, \mathfrak{I}$ и $\widetilde{\mathfrak{I}}$ должен быть решен вопрос о том, каким именно способом формируется информация об объектах и классах. Иначе говоря, должен быть решен вопрос о том, как паре (S, K) сопоставляется соответствующий элемент множества допустимых начальных информаций $\mathfrak{I}$. Способ формирования информации можно определить, задав некоторое множество $\mathfrak{D}$ функций вида $D : \mathfrak{S} \times \mathfrak{B}(\mathfrak{S}) \to \mathfrak{I}$[1], т.е. функций, определенных на множестве пар (S, K) при $S \in \mathfrak{S}$ и $K \subseteq \mathfrak{S}$ и принимающих значения из пространства $\mathfrak{I}$.

Совокупность, состоящую из множеств $\mathfrak{S}, \mathfrak{I}, \widetilde{\mathfrak{I}}$ и $\mathfrak{D}$, можно рассматривать как описание соответствующего класса задач $\mathfrak{Z}$. Чтобы проиллюстрировать содержательный смысл сказанного, приведем примеры двух известных классов задач, определив предварительно понятие стандартного способа формирования информации.

Определение 1.2.1. Множество функций $\mathfrak{D}$ определяет стандартный способ формирования информации, если[2]

$$\mathfrak{I} = \bigcup_{m=1}^{\infty} (\mathfrak{I}_1(m) \otimes \mathfrak{I}_2^m \otimes E_2^m)$$

где $\mathfrak{I}_1(m)$ и $\mathfrak{I}_2$ — некоторые множества, $E_2 = \{0, 1\}$, и если $\mathfrak{D}$ — семейство функций D из $\mathfrak{S} \times \mathfrak{B}(\mathfrak{S})$ в $\mathfrak{I}$, сопоставленных наборам $(S^1, \dots, S^m) \in \mathfrak{S}^m$ и определенных заданием двух функций $D'_{(S^1,\dots,S^m)} : \mathfrak{S} \to \mathfrak{I}_1(m)$ и $D'' : \mathfrak{S} \to \mathfrak{I}_2$ следующим образом: $D(S, K) = (D'_{(S,\dots,S^m)}(S),\ D''(S^1), \dots, D''(S^m),\ P(S^1), \dots, P(S^m))$, где $S \in \mathfrak{S}$, $K \subseteq \mathfrak{S}$ и P — предикат вхождения, соответствующий классу K. Для задач со стандартной информацией матрица информации $\widehat{I}$ имеет вид $\|D(S_i, K_j)\|_{q \times l}$.

[1] Для произвольного множества $\mathfrak{U}$ символом $\mathfrak{B}(\mathfrak{U})$ обозначается множество всех подмножеств множества $\mathfrak{U}$.

[2] $\mathfrak{U} \otimes \mathfrak{V}$ при непустых множествах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ равно по определению $\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}$; если $\mathfrak{U} = \varnothing$, то $\mathfrak{U} \otimes \mathfrak{V} = \mathfrak{V}$, если $\mathfrak{V} = \varnothing$, то $\mathfrak{U} \otimes \mathfrak{V} = \mathfrak{U}$.

Функции D' и D'' определяют проблемно-ориентированные описания допустимых объектов, так что при использовании стандартного способа формирования информации подлежащие классификации объекты с самого начала оказываются описанными относительно набора заранее выделенных допустимых объектов $(S^1, \dots, S^m)$. Этот набор объектов называется обучающей совокупностью, а входящие в него объекты — объектами обучения. Описанием класса K является соответствующий ему булев вектор $(P(S^1), \dots, P(S^m))$, т.е. информация о принадлежности этому классу объектов обучения. Следует отметить, что для функций из семейства $\mathfrak{D}$ множество $\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathfrak{S}^m$ оказывается по сути дела семейством индексов.

Понятие стандартного способа формирования информации по своей природе является чисто эвристическим. Решение о том, чтобы рассматривать прикладную задачу как задачу со стандартной информацией, принимается исследователем и является столь же произвольным, как, например, решение использовать для синтеза корректного алгоритма модель вычисления оценок или метод потенциальных функций. Большое число прикладных задач, удачно решенных с помощью этой эвристики, и наличие широкого класса моделей алгоритмов, ориентированных на решение задач со стандартной информацией, подтверждают полезность этого понятия и позволяют ставить вопрос об отдельном исследовании задач такого типа.

С теоретической точки зрения понятие задач со стандартной информацией оказывается удобным «промежуточным этапом» между общими задачами классификации и конкретными классами задач, для которых используются отдельные модели алгоритмов. Именно в таком качестве задачи классификации со стандартной информацией рассматриваются в настоящей работе.

Пример 1.2.1. (см. [57] и § 0.2). $\mathfrak{S} = \mathcal{M}_1 \times \ldots \times \mathcal{M}_n$, где $\mathcal{M}_t$ при $t \in \{1, \dots, n\}$ — пространства с полуметриками ρ_t, так что объекты S в этом случае суть векторы длины n. При произвольном $S \in \mathfrak{S}$ значение $D'_{(S,\dots,S^m)}(S)$ равно матрице расстояний $\left\| \rho_t(S, S^k) \right\|_{m \times n}$, и, таким образом, $\mathfrak{I}_1(m) = \mathfrak{C}_{m,n}(\mathbb{R}_+)$. Множество $\mathfrak{I}_2$ пусто, т.е. описания объектов обучения непосредственно не используются.

Итак, в данном случае пространство допустимых начальных информаций имеет вид

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathfrak{C}_{m,n}(\mathbb{R}_+) \times \{0,1\}^m.$$

Данный класс задач, для решения которых предназначены, например, алгоритмы вычисления оценок, будет далее обозначаться символом $\mathfrak{Z}_\Gamma$. Вид пространства допустимых финальных информаций $\widetilde{\mathfrak{I}}$ не столь важен; можно считать, скажем, что $\widetilde{\mathfrak{I}} = \{0, 1, \Delta\}$.

Пример 1.2.2. (см. [57]). $\mathfrak{S} = \mathbb{R}^n$, т.е. объекты S в данном случае — числовые векторы длины n. Описаниями обучающих и распознаваемых объектов служат они сами, так что при всех $S \in \mathfrak{S}$ выполнено $D'_{(S,\dots,S^m)}(S) = S$ и $D''(S) = S$. В этом случае пространством возможных начальных информаций $\mathfrak{I}$ является множество $\bigcup_{m=1}^{\infty} (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \{0,1\}^m)$. Данный класс задач будет обозначаться символом $\mathfrak{Z}_R$. Для решения задач из $\mathfrak{Z}_R$ обычно используются модели алгоритмов, основанных на принципе разделения (R-модели). Как и в предыдущем случае можно считать, что $\widetilde{\mathfrak{I}} = \{0, 1, \Delta\}$, что не имеет принципиального значения при теоретическом анализе.

Следует отметить, что при решении прикладных задач классификации этап строгого формального описания множеств $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{I}$ и $\widetilde{\mathfrak{I}}$ чрезвычайно важен. Такое описание производится, во-первых, на базе анализа области исследования (что позволяет описать множества $\mathfrak{S}$ и $\widetilde{\mathfrak{I}}$) и, во-вторых, на основе точного ответа на вопрос: каков вид информации, которая будет поступать на вход алгоритма в процессе эксплуатуции и каким образом эта информация будет формироваться (это позволяет определить множества $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{I}$)? Необходимо иметь в виду, что отсутствие точного ответа на вопрос о виде и способе формирования информации может в некоторых случаях привести к серьезным трудностям, особенно — при содержательной интерпретации получаемых результатов.

1.3 Расширения моделей алгоритмов. Корректирующие операции

Практические задачи синтеза алгоритмов преобразования информации отличаются крайним разнообразием, выражающимся и в различных структурах множеств начальных и финальных информаций $\mathfrak{I}_i$ и $\mathfrak{I}_f$, и в различиях систем ограничений, составляющих структурную информацию. В силу этого решение большинства таких задач с необходимостью включает в себя использование целого ряда эвристических методов и приемов, одним из главных среди которых является применение эвристических информационных моделей алгоритмов.

Модели алгоритмов представляют собой описанные в явном виде параметрические семейства $\mathfrak{M}$ отображений из $\mathfrak{I}_i$ в $\mathfrak{I}_f$, т.е. подмножества множества $\mathfrak{M}_*$. Постановки рассматриваемых задач сводятся в основном к описанию допустимых отображений, т.е. подмножеств $\mathfrak{M}[I_s]$ того же множества $\mathfrak{M}_*$. Разрешимость задачи в рамках модели $\mathfrak{M}$ описывается при этом соотношением $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}[I_s] \neq \varnothing$. В случае, когда задача разрешима, сложность построения решения, т.е. искомого алгоритма, практически определяется сложностью (в неформальном смысле слова) модели $\mathfrak{M}$. Использование «простых» моделей, привлекательное с точки зрения вычислительных проблем, оказывается основанным на неформальном предположении о том, что сама модель «угадана» настолько удачно, что задача имеет решение в ее рамках. При отсутствии же разрешимости возникает необходимость в замене модели, либо приходится ограничиваться приближенными решениями.

Основным техническим приемом алгебраического подхода является построение расширений эвристических информационных моделей с помощью корректирующих операций. Вообще говоря, под корректирующей операцией можно понимать произвольную операцию над множеством $\mathfrak{M}_*$ всех отображений из $\mathfrak{I}_i$ в $\mathfrak{I}_f$. Если $\mathfrak{F}$ — некоторое семейство таких операций, то применение алгебраического подхода формально сводится к замене модели $\mathfrak{M}$ на «расширенную» модель $\mathfrak{F}(\mathfrak{M})$, где

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{M}) = \{\, F(A_1, \ldots, A_p) \mid F \in \mathfrak{F},\ (A_1, \ldots, A_p) \in \mathfrak{M}^p \,\},$$

и к построению в рамках расширения $\mathfrak{F}(\mathfrak{M})$ решений для конкретных задач.

Применение корректирующих операций позволяет реализовать идею о совместном использовании нескольких эвристических алгоритмов при решении единственной задачи с целью устранения недостатков одних алгоритмов за счет остальных. Это вытекает из того, что алгоритм A, построенный с помощью корректирующей операции F, имеет вид $F(A_1, \ldots, A_p)$, где $A_1, \ldots, A_p$ — алгоритмы из $\mathfrak{M}$, так что при вычислении решения для конкретной задачи, т.е. при вычислении значения $A(I_0)$ при соответствующем элементе I_0 пространства $\mathfrak{I}_i$, совместно используются алгоритмы $A_1, \ldots, A_p$ из модели $\mathfrak{M}$.

Множества $\mathfrak{F}(\mathfrak{M})$ называются $\mathfrak{F}$-расширениями моделей $\mathfrak{M}$, поскольку в $\mathfrak{F}$ чаще всего содержится тождественный унарный оператор, чем гарантируется выполнение включения $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}(\mathfrak{M})$.

Целью применения корректирующих операций является обеспечение разрешимости достаточно широкого круга задач, т.е. выполнение условия $\mathfrak{F}(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{M}[I_s] \neq \varnothing$ при соответствующих I_s. Кроме того, целью является и непосредственный синтез решения в конкретных случаях, т.е. построение алгоритма, реализующего допустимое отображение. И если последний, центральный для приложений, вопрос допускает решения лишь при достаточной детализации постановки, то проблема разрешимости оказывается основной при теоретическом анализе проблемы в целом.

Общее определение корректирующих операций как произвольных операций над $\mathfrak{M}_*$ оставляет открытым принципиальный вопрос о способах реализации таких операций. Действительно, при практическом построении корректных алгоритмов корректирующие операции с необходимостью должны быть определены в явном виде. В рамках описываемого подхода применяется один из наиболее стандартных способов определения операций над отображениями.

Пусть $\mathfrak{N}_* = \{\, A \mid A : \mathfrak{V} \to \mathfrak{U} \,\}$, где $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — произвольные множества и пусть $\mathfrak{G}$ — некоторое семейство операций над множеством $\mathfrak{U}$. В этом случае каждой p-арной операции G из $\mathfrak{G}$ можно сопоставить операцию F над $\mathfrak{N}_*$, полагая для произвольных $A_1, \ldots, A_p$ из $\mathfrak{N}_*$ и произвольного V из множества $\mathfrak{V}$:

$$F(A_1, \ldots, A_p)(V) = G(A_1(V), \ldots, A_p(V)). \qquad (1.3.1)$$

Таким способом семейство $\mathfrak{G}$ может быть обращено в семейство $\mathfrak{F}$ операций над множеством отображений $\mathfrak{N}_*$[3].

Непосредственное использование данного способа определения операций над множествами отображений не нашло, однако, широкого распространения при алгебраическом подходе. Основной причиной этого является то обстоятельство, что пространство возможных финальных информаций $\mathfrak{I}_f$, операции над которым должны бы были рассматриваться как корректирующие, определяется содержательными требованиями к виду допустимых

[3]В дальнейшем для обозначения операций над отображениями часто будут использоваться те же символы, что и для порождающих их операций над множествами, что в силу (1.3.1) не может создать разночтений.

«ответов» искомого алгоритма, а отсюда отнюдь не вытекает, что такое пространство может быть удобным «полигоном» для определения на нем и использования подходящих в том или ином смысле операций (см., например, [57]).

Указанное обстоятельство приводит к необходимости крайне существенного для алгебраических конструкций приема — представления алгоритмов в виде суперпозиций алгоритмических операторов и решающих правил.

Известно, что алгоритмы, являющиеся суперпозициями, начали применяться задолго до возникновения алгебраического подхода. Естественность таких конструкций в значительной степени обусловлена практикой принятия решений в реальной жизни на базе некоторых агрегированных скалярных оценок рассматриваемых объектов или ситуаций. Такой процесс и моделируется по сути дела алгоритмами — суперпозициями. При работе этих алгоритмов на первом этапе вырабатываются некоторые (как правило — числовые) оценки, а на втором этапе по оценкам принимается решение, которое выражается на определяемом содержательной стороной дела языке. Большинство известных эвристических информационных моделей алгоритмов классификации содержит алгоритмы именно такого типа.

Итак, будем предполагать, что помимо определенных проблемной средой пространств $\mathfrak{I}_i$ и $\mathfrak{I}_f$ выбрано еще одно пространство $\mathfrak{I}_e$, называемое пространством возможных оценок, и что эвристическая информационная модель $\mathfrak{M}$ представляет собой семейство суперпозиций:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0 = \{\, C \circ B \mid C \in \mathfrak{M}^1,\ C : \mathfrak{I}_e \to \mathfrak{I}_f,\ B \in \mathfrak{M}^0,\ B : \mathfrak{I}_i \to \mathfrak{I}_e \,\}.$$

Семейство $\mathfrak{M}^0$ называется при этом моделью алгоритмических операторов, $\mathfrak{M}^1$ — семейством решающих правил. Отметим, что если считать, что $\mathfrak{I}_e = \mathfrak{I}_f$ и что $\mathfrak{M}^1$ — одноэлементное множество, содержащее унарный тождественный оператор, то рассматриваемая ситуация перейдет в исходную, когда в качестве $\mathfrak{M}$ рассматривается просто подмножество множества $\mathfrak{M}_*$.

Напомним, что при произвольных множествах $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{U}'$ и $\mathfrak{V}'$ и произвольных отображениях u из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{V}$ и u' из $\mathfrak{U}'$ в $\mathfrak{V}'$ произведением $u \times u'$ называется отображение v из $\mathfrak{U} \times \mathfrak{U}'$ в $\mathfrak{V} \times \mathfrak{V}'$ такое, что для любой пары (U, U') из $\mathfrak{U} \times \mathfrak{U}'$ выполнено равенство $v(U, U') = (u(U), u'(U'))$ (см. [15]). Для произвольного отображения u из $\mathfrak{U}^p$ в $\mathfrak{V}$ при $p \geqslant 1$ диагонализацией u_Δ будем называть отображение из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{V}$ такое, что для любого U из $\mathfrak{U}$ выполнено равенство $u_\Delta(U) = u(U, U, \ldots, U)$.

В качестве решающих правил можно использовать не только отображения из $\mathfrak{I}_e$ в $\mathfrak{I}_f$, но и отображения из $\mathfrak{I}_e^p$ в $\mathfrak{I}_f$ при $p \geqslant 1$. В силу этого можно считать, что

$$\mathfrak{M}^1 \subseteq \bigcup_{p=0}^{\infty} \{\, C \mid C : \mathfrak{I}_e^p \to \mathfrak{I}_f \,\}$$

и

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0 = \{\, C \circ (B_1 \times \ldots \times B_p)_\Delta \mid C \in \mathfrak{M}^1, (B_1, \ldots, B_p) \in (\mathfrak{M}^0)^p \,\}.$$

Вид суперпозиции $C \circ (B_1 \times \ldots \times B_p)_\Delta$ объясняется следующими соображениями: при формировании искомого алгоритма одновременно используется несколько алгоритмических операторов $B_1, \ldots, B_p$ из $\mathfrak{M}^0$, что соответствует по сути отображению $B_1 \times \ldots \times B_p$ из $\mathfrak{I}_i^p$ в $\mathfrak{I}_e^p$; при решении любой задачи все алгоритмические операторы применяются к единственному элементу из $\mathfrak{I}_i$, т.е. на самом деле используется отображение $(B_1 \times \ldots \times$ $\times B_p)_\Delta$ из $\mathfrak{I}_i$ в $\mathfrak{I}_e^p$; решающее правило C — это отображение из $\mathfrak{I}_e^p$ в $\mathfrak{I}_f$ (недостаточность изучения только унарных решающих правил, т.е. отображений из $\mathfrak{I}_e$ в $\mathfrak{I}_f$, подтверждается, например, случаем, когда $\mathfrak{I}_e$ и $\mathfrak{I}_f$ — конечные множества и мощность $\mathfrak{I}_e$ меньше мощности $\mathfrak{I}_f$).

Итак, пусть $\mathfrak{G}$ — некоторое множество операций над пространством возможных оценок $\mathfrak{I}_e$ и $\mathfrak{F}$ — множество операций над $\mathfrak{M}_*^0 = \{\, B \,|\, B : \mathfrak{I}_i \to \mathfrak{I}_e \,\}$, сопоставленных операциям из $\mathfrak{G}$ способом (1.3.1). Применяя операции из $\mathfrak{F}$ к отображениям из $\mathfrak{M}^0$, можно получить, вообще говоря, более широкое семейство алгоритмических операторов

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0) = \{\, F(B_1, \ldots, B_p) \,|\, F \in \mathfrak{F},\ (B_1, \ldots, B_p) \in (\mathfrak{M}^0)^p \,\}. \tag{1.3.2}$$

Семейство $\mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0)$ называется $\mathfrak{F}$-расширением модели алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$.

Используя при формировании «целых» алгоритмов вместо исходной модели $\mathfrak{M}^0$ ее $\mathfrak{F}$-расширение $\mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0)$, получаем модель $\mathfrak{F}[\mathfrak{M}]$ — $\mathfrak{F}$-расширение исходной модели алгоритмов:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\,[\,\mathfrak{M}\,] = \mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0) = \quad & \{\, C \circ (F_1(B_1^1 \times \ldots \times B_{r_1}^1) \times \ldots \times F_p(B_1^p \times \ldots \times B_{r_p}^p))_\Delta \,| \\ & \qquad | \, C \in \mathfrak{M}^1,\ (F_1, \ldots, F_p) \in \mathfrak{F}^p,\ B_1^1 \in \mathfrak{M}^0,\ \ldots,\ B_{r_p}^p \in \mathfrak{M}^0 \,\}.\end{aligned} \tag{1.3.3}$$

Отметим, что для выполнения соотношения $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}[\mathfrak{M}]$ достаточно, чтобы, например, в $\mathfrak{G}$, а потому и в $\mathfrak{F}$, содержался тождественный унарный оператор.

Применение корректирующих операций, построенных на основе операций над пространством возможных оценок $\mathfrak{I}_e$, оправдывается следующими интуитивно ясными соображениями. Пространства возможных начальных и финальных информаций $\mathfrak{I}_i$ и $\mathfrak{I}_f$ определяются внешними по отношению к математическим конструкциям реальными условиями. Поэтому эти пространства, как правило, оказываются весьма плохо приспособленными для непосредственного решения требуемых задач. Пространство же возможных оценок $\mathfrak{I}_e$ выбирается в процессе решения задачи из соображений удобства, так что представляется вполне понятным желание перенести «центр тяжести» проблемы именно на это пространство, т.е. на корректирующие операции.

В качестве $\mathfrak{I}_e$ обычно выбираются пространства, непосредственно связанные с действительными числами. Например, для задач классификации часто полагают $\mathfrak{I}_e = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathbb{R})$, что позволяет использовать корректирующие операции, построенные на базе операций над действительными матрицами. Для задач, в которых существенным является некоторое нелинейное отношение порядка, бывает удобно применять в качестве $\mathfrak{I}_e$ плоскость $\mathbb{R}^2$ и т.д.

Итак, можно сказать, что методы алгебраического подхода в значительной степени основаны на конструкции (1.3.3). Выяснение ролей, которые играют при этом семейства

$\mathfrak{M}^0$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}^1$, и получение критериев, которым эти семейства должны удовлетворять, будет одной из главных целей дальнейших построений в настоящей работе.

1.4 Описание универсальных и локальных ограничений на содержательном уровне

В ситуации, когда зафиксированы пространства возможных начальных информаций $\mathfrak{I}_i$ и финальных информаций $\mathfrak{I}_f$, любая из задач определяется соответствующей структурной информацией I_s, представляющей собой систему ограничений, выделяющих из $\mathfrak{M}_*$ подмножество допустимых для задачи отображений $\mathfrak{M}[I_s]$. При этом характерной частью структурной информации в рассматриваемых задачах являются прецедентные ограничения, т.е. наборы пар вида $((I_i^1, I_f^1), \ldots, (I_i^q, I_f^q))$, сопровождаемые требованием, чтобы искомый алгоритм A удовлетворял системе равенств $A(I_i^k) = I_f^k$ при $k \in \{1, \ldots, q\}$. Наличие прецедентных ограничений позволяет рассматривать эти задачи как задачи экстраполяции функций, определенных изначально на конечном множестве точек.

Помимо чисто прецедентных ограничений в структурную информацию могут входить и дополнительные ограничения на вид отображений, которые должны реализовываться корректными алгоритмами. Во многих случаях при отсутствии таких дополнительных ограничений задача теряет смысл, так как допускает формально правильные, но явно неудовлетворительные с содержательной точки зрения решения. Следует отметить, что и до возникновения алгебраического подхода, и в первых работах, выполненных в этом направлении, дополнительные по отношению к прецедентным ограничения подразумевались или даже неявно использовались, однако изучение их в явном виде не проводилось. Отличительной особенностью настоящей работы можно считать то, что прецедентные и дополнительные ограничения рассматриваются как абсолютно равноправные части структурной информации. Более того, выясняется, что именно дополнительные к прецедентным ограничения представляют наибольший интерес.

Деление ограничений на прецедентные и дополнительные к ним имеет один важный аспект, уже упоминавшийся во введении. Аспект этот связан с «конечностью» прецедентной информации и с, как правило, «бесконечностью» информации, к ней дополнительной. Это различие можно проиллюстрировать следующим рассуждением. Предположим, что имеется алгоритм, претендующий на то, чтобы считаться решением некоторой задачи. За конечное число шагов можно проверить, удовлетворяет ли он прецедентным ограничениям, просто вычислив соответствующие значения и сравнив их с известными. Однако, рассматривая алгоритм как «черный ящик», за конечное число шагов, как правило, нельзя сделать вывод о том, что реализуемое им отображение удовлетворяет дополнительным к прецедентным ограничениям.

При использовании конструкций алгебраического подхода оказывается существенным еще одно различие между прецедентными и дополнительными ограничениями. А именно, прецедентные ограничения по самой своей сути жестко связаны с конкретными пространствами возможных начальных и финальных информаций $\mathfrak{I}_i$ и $\mathfrak{I}_f$. Следовательно, их использование возможно только для «целых» алгоритмов, но не для алгоритмичесих операторов, корректирующих операций и решающих правил, из которых эти «целые» алгоритмы строятся в виде (1.3.3). Дополнительные же ограничения в силу их «бесконечности» обязательно должны использоваться так, чтобы синтезируемые алгоритмы удовлетворяли им «по построению».

Дополнительные к прецедентным ограничения должны представлять собой систему требований, применимых как к отображениям из $\mathfrak{I}_i$ в $\mathfrak{I}_f$, так и к отображениям из $\mathfrak{I}_i$ в $\mathfrak{I}_e$, из $\mathfrak{I}_e$ в себя и из $\mathfrak{I}_e$ в $\mathfrak{I}_f$, причем не только к унарным, но и к p-арным при $p \geqslant 1$. Иначе говоря, эти ограничения должны иметь смысл не только для моделей алгоритмов, но и для моделей алгоритмических операторов и семейств корректирующих операций и решающих правил. При этом дополнительные ограничения должны быть, конечно, устроены так, чтобы синтезированные в виде (1.3.3) из удовлетворяющих этим ограничениям алгоритмичесих операторов, корректирующих операций и решающих правил алгоритмы сами удовлетворяли данным ограничениям. Этот тезис служит основой формального описания обсуждаемых ограничений.

Итак, в настоящей работе рассматриваются задачи синтеза алгоритмов, которые должны удовлетворять структурной информации I_s, представляющей собой систему ограничений на отображения из пространства возможных начальных информаций $\mathfrak{I}_i$ в пространство возможных финальных информаций $\mathfrak{I}_f$. При этом считается, что системы ограничений I_s распадаются на пары (I_s^u, I_s^l) подсистем, которые мы будем называть системами универсальных и локальных ограничений соответственно. Локальные ограничения можно понимать как допускающие проверку за конечное число шагов условия, относящиеся к отображениям из $\mathfrak{I}_i$ в $\mathfrak{I}_f$. Универсальные же ограничения должны относиться ко всем отображениям, используемым при синтезе алгоритмов методами алгебраического подхода и сохраняться при образовании суперпозиций вида (1.3.3).

Следует отметить, что рассмотрение структурной информации как совокупности из двух систем ограничений, т.е. гипотеза о том, что $I_s = (I_s^u, I_s^l)$ и $\mathfrak{M}[I_s] = \mathfrak{M}[I_s^u] \cap \mathfrak{M}[I_s^l]$, не исключает, конечно, возможности альтернативных построений, ориентированных на анализ иных методов синтеза алгоритмов преобразования информации и иных прикладных задач. Проводимые в работе построения отражают современное состояние алгебраического подхода и относятся лишь к задачам, в которых имеются только универсальные и локальные ограничения, и к моделям алгоритмов, предназначенных для решения таких задач.

В качестве локальных ограничений далее будут рассматриваться только прецедентные ограничения, что отвечает имеющейся в настоящее время практике решения задач изучаемого типа.

На интуитивном уровне универсальные ограничения — это описания общих свойств, структуры отображений, которые должны реализовываться корректными алгоритмами. Универсальные ограничения по своему происхождению в практических задачах существенно отличаются от прецедентов. В то время, как прецедентные ограничения являются по сути дела описаниями реальных экспериментов, универсальные ограничения оказываются выражением экспертных знаний о природе изучаемой реальной ситуации и относятся «глобально» ко всему процессу принятия решений. Именно поэтому такие ограничения не могут как правило быть проверены для алгоритма, рассматриваемого как некоторый «черный ящик», и потому они с необходимостью должны быть учтены в самой структуре построенного алгоритма.

Универсальные ограничения отличаются от прецедентных большим разнообразием. В качестве таких ограничений может, например, выступать требование монотонности допустимых отображений или, более обще, требование, чтобы допустимые отображения были гомоморфизмами алгебраических систем, каковыми в таком случае должны быть, конечно, $\mathfrak{I}_i$ и $\mathfrak{I}_f$. В основном в настоящей работе будет рассматриваться случай задач и алгоритмов классификации, для которых универсальные ограничения возникают как данные об однородности классов иобъектов, об их независимости и т.п.

Существенно, что во всех случаях универсальные ограничения трактуются как формальные описания реальной информации о предметной области. При этом возникает вероятность того, что универсальные ограничения будут противоречить прецедентным, т.е. будет выполнено равенство $\mathfrak{M}[I_s^u] \cap \mathfrak{M}[I_s^l] = \varnothing$. В таком случае при нашем подходе появляется возможность утверждать, что предложенная реальная информация внутренне противоречива. Такой вывод нельзя было получить в рамках существовавших ранее конструкций алгебраического подхода, поскольку сама структура теоретических построений обеспечивала возможность получения лишь достаточных (но не необходимых) условий разрешимости.

Применение методов алгебраического подхода и, в частности, развиваемой в настоящей работе теории универсальных и локальных ограничений, существенно связано с выбором пространства возможных оценок. Как уже говорилось, выбор этого пространства производится в процессе анализа и решения задачи или класса задач и диктуется в основном соображениями удобства его использования. При наличии универсальных ограничений выбор $\mathfrak{I}_e$ подчиняется естественному требованию: это пространство должно быть наделено структурой, позволяющей сохранять информацию, выражаемую универсальными ограничениями. Так, скажем, для задач классификации в качестве $\mathfrak{I}_e$ обычно используются пространства матриц, размеры которых определяются количествами классов и объектов. При универсальных ограничениях типа монотонности в качестве $\mathfrak{I}_e$ применяются упорядоченные множества. В любом случае, выбор пространства возможных оценок производится с учетом вида универсальных ограничений.

В соответствии с обычной математической практикой объектами теоретического исследования в алгебраическом подходе являются не отдельные конкретные задачи, но классы, семейства задач. При этом оказывается возможным рассматривать целую иерархию таких классов (вопрос подробнее будет обсуждаться в следующем параграфе), однако в общем можно сказать, что такие классы определяются заданием пространств возможных начальных и финальных информаций $\mathfrak{I}_i$ и $\mathfrak{I}_f$ и системы или систем универсальных ограничений I_s^u (конкретные задачи получаются при фиксации локальных ограничений, т.е.

прецедентных данных).

Итак, в работе проводится изучение систем универсальных и локальных ограничений и соответствующих классов задач. Кроме того исследуются и семейства отображений (алгоритмов, алгоритмических операторов, корректирующих операций и решающих правил), применяемых для решения рассматриваемых задач. При этом для каждой системы универсальных ограничений возникает автономный комплекс результатов, относящихся к изучаемым объектам.

1.5 Иерархии ограничений и понятия регулярности и полноты

Для задач синтеза корректных алгоритмов распознавания, удовлетворяющих одновременно системам универсальных и локальных ограничений, важнейшим теоретическим вопросом оказывается проблема разрешимости. Это, конечно, не снижает актуальности вопросов, связанных с конкретными семействами алгоритмов и непосредственным синтезом решений для отдельных задач, однако, как будет видно из дальнейшего, такие проблемы оказываются при алгебраическом подходе в значительной степени производными от вопроса о разрешимости. Обсуждению особенностей изучения данного вопроса в рамках алгебраического подхода и посвящен настоящий параграф.

Напомним, что факт разрешимости задачи Z, определенной системами универсальных и локальных ограничений I_s^u и I_s^l, выражается равенством $\mathfrak{M}[I_s^u] \cap \mathfrak{M}[I_s^l] \neq \varnothing$, означающим, что среди отображений из $\mathfrak{I}_i$ в $\mathfrak{I}_f$ существуют удовлетворяющие одновременно и универсальным, и локальным ограничениям. В рамках алгебраического подхода, однако, помимо понятия разрешимости (и даже преимущественно) используется понятие регулярности, являющееся его обобщением. Рассмотрение этого понятия будет нашей ближайшей целью.

Использование регулярности обусловлено прежде всего тем, что задачи при теоретическом исследовании рассматриваются не индивидуально, а как представители некоторых классов в известном смысле однородных задач. Действительно, целью теории, как правило, является изучение общих свойств различных задач и выработка единой методики их решения. Отсюда вытекает, что, изучая метод решения (модель алгоритмов и т.п.), следует ставить вопрос об одновременной разрешимости задач из некоторых семейств с тем, чтобы для конкретной задачи уже из самого факта ее принадлежности такому семейству можно было делать вывод о ее разрешимости данным методом.

Помимо указаной в предыдущем абзаце «методической» причины существуют и реальные обстоятельства, заставляющие рассматривать вопрос о «коллективной разрешимости» изучаемых задач. Действительно, задачи в основном определяются структурной информацией, выраженной в виде системы ограничений. Предположим, что требуется исследовать метод решения в тот момент, когда известна лишь часть структурной информации. В такой ситуации логично потребовать, чтобы метод был по возможности пригоден при произвольной неизвестной части информации. Так что и с этой точки зрения представляется целесообразным рассматривать вопрос о разрешимости задач с частично определенными ограничениями, что эквивалентно изучению одновременной разрешимости всех задач из семейств, получаемых при продолжениях известной части структурной информации.

Итак, при алгебраическом подходе изучается обобщенная проблема разрешимости — проблема регулярности задач синтеза корректных алгоритмов. На формальном уровне понятие регулярности можно определить, предположив, что имеется разбиение множества $\mathfrak{Z}$ изучаемых задач с общей системой универсальных ограничений на классы, которые рассматриваются как классы эквивалентности по некоторому отношению «$\approx$» (соотношение $Z_1 \approx Z_2$ интерпретируется, например, как факт неразличимости задач Z_1 и Z_2 в момент выбора и анализа модели алгоритмов). Задача Z из множества $\mathfrak{Z}$ называется регулярной, если она разрешима и разрешимы все задачи из класса эквивалентности по отношению «$\approx$», в который она входит. Учитывая, что разрешимые задачи — это задачи, для которых множество допустимых отображений непусто, т.е. задачи, для которых существуют семейства алгоритмов, содержащие их решения, получаем эквивалентное приведенному определение регулярной задачи: задача Z из множества $\mathfrak{Z}$ называется полной относительно семейства $\mathfrak{M}$ отображений из $\mathfrak{I}_i$ в $\mathfrak{I}_f$, если в $\mathfrak{M}$ содержатся допустимые отображения для всех задач из класса эквивалентности, содержащего Z; задача Z называется регулярной, если для нее существует семейство отображений $\mathfrak{M}$, относительно которого она полна.

Итак, при алгебраическом подходе основным объектом исследования являются регулярные задачи и методы их решения. Свойство регулярности, зависящее как от параметра от отношения эквивалентности на множестве задач, является непосредственным обобщением свойства разрешимости. Действительно, при диагональном отношении эквивалентности, т.е. если в качестве эквивалентности, определяющей регулярность, используется равенство, свойство регулярности совпадает со свойством разрешимости.

Ориентация на решение регулярных задач при параметрическом в вышеуказанном смысле понятии регулярности обеспечивает дополнительную гибкость конструкциям алгебраического подхода. Это выражается в том, что в разных случаях в зависимости от внешних условий по-разному может быть решен вопрос о том, что такое «хорошо поставленная задача», поскольку в качестве формального аналога этого содержательного представления можно рассматривать именно понятие «регулярная задача». Отметим, что подход такого типа характерен и для многих областей классической математики, когда изучается, скажем, вопрос не просто о существовании решения, но о существовании устойчивого решения и т.п.

При наличии класса задач $\mathfrak{Z}$ и эквивалентности, определяющей регулярность, из $\mathfrak{Z}$ оказывается выделен подкласс регулярных задач, который будет обозначаться специальным символом $\mathfrak{Z}_{[R]}$. Наличие такого подкласса позволяет определить следующее важнейшее понятие — понятие полной модели алгоритмов: модель алгоритмов, удовлетворяющих универсальным ограничениям класса задач $\mathfrak{Z}$, называется полной, если в ней для каждой регулярной задачи из $\mathfrak{Z}_{[R]}$ содержится корректный алгоритм. Учитывая, что классы задач, структурные ограничения и эквивалентности, определяющие понятия регулярности, отражают имеющуюся реальную информацию, можно сказать, что понятие полноты определяет естественное экстремальное свойство моделей алгоритмов. Именно поэтому изучение условий, обеспечивающих полноту, и является центральным вопросом алгебраической теории универсальных и локальных ограничений.

В силу важности обсуждаемых понятий, отановимся на их интерпретации с еще одной точки зрения.

Допустим, что рассматривается разрешимая, но не регулярная задача. Если даже эта задача принадлежит классу, для которого найдена полная модель алгоритмов и разработан соответствующий метод синтеза корректных алгоритмов, то может оказаться, что построение стандартным образом решения для нерегулярной задачи невозможно. Ситуация аналогична той, в которой при классическом математическом исследовании возникает необходимость изучения вырожденных случаев: стандартные методы оказываются неприменимы и приходится содавать специальные конструкции, предназначенные для решения именно вырожденных задач, причем, как правило, для задач с некоторым фиксированным типом вырождения. Отметим, что при этом часто возникает дополнительный вопрос об условиях, обеспечивающих содержательную адекватность решения.

Предположим теперь, что, наоборот, для решения регулярной задачи используется неполная модель алгоритмов. При этом может оказаться, что задача не будет решена, и тогда придется признать, что неудача целиком обусловлена слабостью математических конструкций, а не какими-то внешними причинами. Попытки применения неполных моделей могут быть основаны лишь на надежде на то, что модель угадана достаточно удачно для конкретного случая, так что задача в ее рамках разрешима.

Имеется, наконец, еще одно обстоятельство, обусловившее изучение вместо непосредственно разрешимости регулярности и, соответственно, полноты. Дело в том, что поскольку подклассы регулярных задач меньше, как правило, классов разрешимых задач, то требование полноты (т.е. разрешимости для всех регулярных задач) оказывается мягче требования разрешимости для всех в принципе разрешимых задач. В силу этого синтез полных моделей алгоритмов оказывается обычно более реальной с практической точки зрения задачей, чем построение моделей, пригодных для решения всех разрешимых задач. Справедливость этого замечания зависит, конечно, от эквивалентности, определяющей понятие регулярности. Кроме того, можно отметить, что в некоторых случаях обсуждаемые требования к моделям алгоритмов (полнота и разрешимость всех разрешимых задач) оказываются эквивалентными (см. §6.2).

Для задач классификации, постановка которых включает в себя матрицу информации $\widehat{I}$ и информационную матрицу $\widehat{\widehat{I}}$, эквивалентность, определяющая понятия регулярности и полноты, задается обычно следующим образом. Рассматривается класс задач одной размерности с общими для всех задач пространствами допустимых начальных и финальных информаций и с фиксированной системой универсальных ограничений. Задачи Z_1 и Z_2 из такого класса считаются эквивалентными, если совпадают их матрицы информации. Таким образом класс эквивалентности, содержащий задачу Z, возникает при произвольном варьировании информационной матрицы этой задачи. Определяемое данным отношением эквивалентности понятие регулярности и будет в основном изучаться в настоящей работе.

Из вышесказанного вытекает, что свойство регулярности задач классификации целиком определяется соотношением систем универсальных ограничений и матриц информации. Производное от регулярности понятие полноты оказывается при этом связанным со своеобразной сюръективностью: образ матрицы информации при отображении всеми алгоритмами из полной модели должен совпадать со всем пространством информационных матриц.

Итак, при алгебраическом подходе изучается обобщенная проблема разрешимости — проблема регулярности, связанная с наличием естественной иерархии задач, т.е. определяющих задачи ограничений. Понятию регулярности сопоставляются понятия полноты, выражающие экстремальные свойства применяемых для решения задач моделей алгоритмов. В результате образуется система взаимосвязанных понятий, изучение которой для случая задач классификации является основным предметом настоящей работы.

1.6 Основные проблемы теории универсальных и локальных ограничений

В § 0.3 были рассмотрены вопросы, появившиеся на начальной стадии развития алгебраического подхода и приведшие к созданию излагаемой теории. Главной целью настоящего параграфа является рассмотрение основных «внутренних» проблем, изучение которых и составляет собственно эту теорию. Кроме того, здесь разбираются вопросы, связанные с приложениями теории универсальных и локальных ограничений к анализу используемых на практике методов решения задач классификации.

Ориентация теории универсальных и локальных ограничений на решение задач синтеза корректных алгоритмов преобразования информации приводит прежде всего к необходимости формального описания изучаемого класса задач. В данном случае такой класс образуют задачи, определяемые системами универсальных и локальных ограничений. Поскольку в качестве локальных ограничений выступают прецеденты, описание которых в значительной степени диктуется внешними условиями, то в основном проблема сводится к описанию и изучению универсальных ограничений. Именно вопрос формализации понятия «универсальные ограничения» оказывается исходной проблемой развиваемой здесь теории.

Отметим, что при выборе языка для описания универсальных ограничений приходится принимать во внимание специальный вид суперпозиций (см. (1.3.3)), используемых при алгебраическом подходе для синтеза корректных алгоритмов. Это реализуется путем выделения допустимых описаний универсальных ограничений, т.е. описаний таких, что суперпозиции вида (1.3.3), построенные из отображений, удовлетворяющих ограничениям, сами этим ограничениям удовлетворяют.

Таким образом, уточненная постановка исходной проблемы теории универсальных и локальных ограничений состоит в формализации понятия «универсальные ограничения», согласованной с конструкцией расширений эвристических информационных моделей алгоритмов.

Одной из главных целей теоретических исследований, проводимых в рамках алгебраического подхода, является изучение вопроса о разрешимости и, более обще, о регулярности задач и о полноте моделей алгоритмов. В некоторых случаях может оказаться, что универсальные ограничения таковы, что они сами по себе исключают возможность существования регулярных задач и полных моделей алгоритмов. Таким образом возникает вопрос о по сути дела согласовании класса систем универсальных ограничений и эквивалентности, определяющей понятия регулярности и полноты. Этот вопрос может быть поставлен таким образом: какими свойствами должны удовлетворять универсальные ограничения, чтобы существовали регулярные задачи и полные модели алгоритмов?

При наличии описанной на формальном языке системы универсальных ограничений, согласованной с конструкцией расширений моделей алгоритмов и с определением регулярных задач, оказывается возможным построение системы взаимосвязанных необходимых и достаточных критериев регулярности задач и полноты, причем как для моделей алгоритмов в целом, так и для отдельных семейств отображений, применяемых для их построения, т.е. для моделей алгоритмических операторов и семейств корректирующих операций и решающих правил. Вывод таких критериев является основной общей проблемой теории универсальных и локальных ограничений.

Описание универсальных ограничений и вышеуказанная система критериев представляют собой результаты высокого уровня общности, которые именно в силу общности оказываются недостаточно удобны при анализе конкретных объектов — задач, моделей алгоритмов и семейств корректирующих операций. Поэтому возникает следующая важная проблема — получение результатов, с одной стороны, имеющих достаточно обширные сферы потенциальных приложений, и, с другой стороны, пригодных для непосредственного использования в практических ситуациях. Таким образом, проблемой оказывается построение «промежуточных» по общности критериев. Примерами решения такой проблемы в настоящей работе являются комплексы результатов о задачах со стандартной информацией и о симметрических и функциональных универсальных ограничениях для алгоритмов классификации.

Универсальные ограничения по сути дела являются описаниями некоторых множеств отображений, в частности — описаниями подмножеств множества $\mathfrak{M}_*$ отображений из $\mathfrak{I}_i$ в $\mathfrak{I}_f$. В момент, когда описан класс таких ограничений, возникает их естественная иерархия, соответствующая теоретико-множественым соотношениям между отвечающими ограничениям подмножествами множества $\mathfrak{M}_*$. Кроме того возникает иерархия понятий «регулярность» и «полнота» в том смысле, что из полноты модели алгоритмов при одной системе универсальных ограничений может вытекать полнота при другой системе, а критерии регулярности при разных системах ограничений могут, например, совпадать и т.д. Изучение соотношений такого типа оказывается также одной из важнейших проблем теории универсальных и локальных ограничений, поскольку различные системы универсальных ограничений могут быть в разной степени удобны для использования при решении конкретных проблем и возможны ситуации, когда задачи, определенные некоторой системой универсальных ограничений, будет желательно решать, используя иную систему.

Предметом изучения при алгебраическом подходе являются как задачи, так и эвристические конструкции, используемые для их решения. По отношению к задачам основными результатами настоящей работы оказываются уточнение их постановки и критерии регулярности (разрешимости). Основные результаты для эвристических информационных моделей — это критерии, которым должны удовлетворять образующие такие модели семейства отображений. Наличие этих критериев позволяет ставить важную для приложений поблему определения минимальной достаточной сложности моделей алгоритмических операторов и семейств корректирующих операций. Эта проблема является, конечно, «внешней» по отношению к теории универсальных и локальных ограничений, однако и сама постановка этого вопроса, и все известные конкретне случаи его решения непосредственно связаны с данной теорией.

Наконец, важной, но опять-таки «внешней», является проблема синтеза и реализации эффективных численных методов для решения конкретных классов прикладных задач. При решении этой проблемы приходится обычно использовать различного рода дополнительные эвристические соображения и конструкции. Роль теоретических результатов сводится при этом к определению общих направлений, в которых ведется поиск решений.

Итак,основными проблемами собственно теории универсальных и локальных ограничений являются:

- проблема формального описания универсальных ограничений, согласованного с используемыми для синтеза корректных алгоритмов конструкциями и с определениями регулярности и полноты;
- проблема построения систем взаимосвязанных критериев регулярности и полноты для общих и конкретных систем универсальных ограничений;
- проблема изучения взаимосвязи различных систем универсальных ограничений;
- проблемы исследования конкретных эвристических информационных моделей и семейств корректирующих операций с точки зрения полноты и минимальной достаточной сложности.

Описание построений, приводящих к решению указанных проблем для задач и алгоритмов классификации, составляет содержание остальных глав настоящей работы.

Глава 2

Общие универсальные ограничения

2.1 Исходная формализация

Целью настоящего параграфа является описание математического объекта, который можно считать формальным аналогом введенного ранее содержательного представления о системах универсальных ограничений. Для удобства чтения предпошлем этому краткий обзор основных используемых обозначений и понятий.

Итак, рассматривается задача синтеза алгоритмов A, реализующих отображения из пространства возможных начальных информаций $\mathfrak{I}_i$ в пространство возможных финальных информаций $\mathfrak{I}_f$. Множество всех отображений из $\mathfrak{I}_i$ в $\mathfrak{I}_f$ обозначается символом $\mathfrak{M}_*$, так что $\mathfrak{M}_* = \{\, A \mid A : \mathfrak{I}_i \to \mathfrak{I}_f \,\}$. Задачи определяются структурными информациями I_s, выделяющими из $\mathfrak{M}_*$ подмножества допустимых отображений, обозначаемые $\mathfrak{M}[I_s]$. Любой алгоритм A, реализующий произвольное из допустимых отображений, называется корректным для задачи, определяемой структурной информацией I_s и является ее решением. Таким образом понятие «задача» оказывается по сути дела эквивалентным понятию «структурная информация», которая в свою очередь может рассматриваться как описание соответствующего подмножества множества $\mathfrak{M}_*$, т.е. как система ограничений, выделяющих из $\mathfrak{M}_*$ это подмножество.

Конструкции алгебраического подхода к рассматриваемой проблеме синтеза корректных алгоритмов основаны на использовании «промежуточного» по отношению к $\mathfrak{I}_i$ и $\mathfrak{I}_f$ пространства возможных оценок $\mathfrak{I}_e$. При этом корректные алгоритмы синтезируются на базе эвристических информационных моделей, т.е. параметрических семейств отображений из $\mathfrak{I}_i$ в $\mathfrak{I}_f$, представляющих собой суперпозиции алгоритмических операторов (отображений из $\mathfrak{I}_i$ в $\mathfrak{I}_e$) и решающих правил (отображений из $\mathfrak{I}_e^p$ в $\mathfrak{I}_f$, p — арность решающего правила).

Таким образом, модели $\mathfrak{M}$ определяются моделями алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$, где $\mathfrak{M}^0 \subseteq \{\, B \mid B : \mathfrak{I}_i \to \mathfrak{I}_e \,\}$, и решающих правил $\mathfrak{M}^1$, где $\mathfrak{M}^1 \subseteq \bigcup_{p=1}^{\infty}\{\, C \mid C : \mathfrak{I}_e^p \to \mathfrak{I}_f \,\}$, следующим образом:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0 = \{\, C \circ (B_1 \times \ldots \times B_p)_\Delta \mid C \in \mathfrak{M}^1,\ (B_1, \ldots, B_p) \in (\mathfrak{M}^0)^p \,\}. \qquad (2.1.1)$$

Для синтеза корректных алгоритмов используются корректирующие операции F, определенные над множеством отображений $\mathfrak{M}_*^0 = \{\, B \mid B : \mathfrak{I}_i \to \mathfrak{I}_e \,\}$. Применение семейства таких операций эквивалентно тому, что поиск решения ведется в рамках $\mathfrak{F}$-расширения модели $\mathfrak{M}$, обозначаемого $\mathfrak{F}[\mathfrak{M}]$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\,[\,\mathfrak{M}\,] = \mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0) = \ & \{\, C \circ (F_1(B_1^1 \times \ldots \times B_{r_1}^1) \times \ldots \times F_p(B_1^p \times \ldots \times B_{r_p}^p))_\Delta \mid \\ & \mid C \in \mathfrak{M}^1,\ (F_1, \ldots, F_p) \in \mathfrak{F}^p,\ B_1^1 \in \mathfrak{M}^0,\ \ldots,\ B_{r_p}^p \in \mathfrak{M}^0 \,\}.\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Корректирующие операции, рассматриваемые в настоящей работе, вводятся с помощью операций над пространством возможных оценок $\mathfrak{I}_e$:

$$F(B_1, \ldots, B_p)(I) = F(B_1(I), \ldots, B_p(I)). \tag{2.1.3}$$

Здесь I пробегает пространство возможных начальных информаций $\mathfrak{I}_i$, $B_1, \ldots, B_p$ — произвольные отображения из $\mathfrak{I}_i$ в $\mathfrak{I}_e$, F в левой части равенства — корректирующая операция, в правой части — операция над $\mathfrak{I}_e$.

Системы ограничений $\mathfrak{I}_s$ рассматриваются как совокупности пар подсистем — системы универсальных ограничений I_s^u и системы локальных ограничений I_s^l. Система I_s^u выделяет из $\mathfrak{M}_*$ подмножество $\mathfrak{M}[I_s^u]$, система I_s^l — подмножество $\mathfrak{M}[I_s^l]$, и считается, что $\mathfrak{M}[I_s] = \mathfrak{M}[I_s^u] \cap \mathfrak{M}[I_s^l]$. Особенностью системы универсальных ограничений I_s^u является то, что она выделяет подмножества удовлетворяющих ей отображений не только из множества $\mathfrak{M}_*$ всех отображений из $\mathfrak{I}_i$ в $\mathfrak{I}_f$, но и из множеств отображений $\{\, B \mid B : \mathfrak{I}_i \to \mathfrak{I}_e \,\}$, $\bigcup_{p=1}^{\infty}\{\, F \mid F : \mathfrak{I}_e^p \to \mathfrak{I}_e \,\}$ и $\bigcup_{p=1}^{\infty}\{\, C \mid C : \mathfrak{I}_e^p \to \mathfrak{I}_f \,\}$.

Для того, чтобы формализовать понятие «система универсальных ограничений», прежде всего предположим, что определен класс $\mathfrak{K}$, объектами которого являются множества, используемые как $\mathfrak{I}_i$, $\mathfrak{I}_f$ и $\mathfrak{I}_e$ и все конечные декартовы степени таких множеств. Пусть также Ψ — категория с классом объектов $\mathfrak{K}$, морфизмами которой являются все отображения объектов друг в друга, причем композиции морфизмов есть суперпозиции отображений. Все используемые при алгебраическом подходе отображения («целые» алгоритмы, алгоритмические операторы и решающие правила) оказываются при этом морфизмами категории Ψ или им соответствуют (корректирующие операции).

Категория Ψ не определена вышесказанным однозначно (неоднозначен выбор класса объектов $\mathfrak{K}$). Уточнение определения категории Ψ, т.е. конкретный выбор класса объектов, приводит к отдельным теориям для разных типов задач и соответствующих алгоритмов. Скажем, если в качестве $\mathfrak{K}$ выступает класс упорядоченных множеств, то соответствующие результаты могут составить теорию задач распознавания с ограничениями типа монотонности. В данной работе в основном в качестве объектов класса $\mathfrak{K}$ рассматриваются пространства матриц фиксированного размера над произвольными моножествами (и, конечно, все декартовы степени таких пространств), что приводит к теории задач и алгоритмов классификации. В целом можно сказать, что категория Ψ определяет самые общие рамки, в которых проводится исследование.

Следует отметить, что необходимость включения в класс $\mathfrak{K}$ наряду с множествами, используемыми для данного класса задач и алгоритмов в качестве $\mathfrak{I}_i$, $\mathfrak{I}_f$ и $\mathfrak{I}_e$, всех конечных декартовых степеней таких множеств вытекает из необходимости совместного изучения как унарных отображений (алгоритмов и алгоритмических операторов), так и отображений арности, вообще говоря, большей 1 (корректирующих операций и решающих правил).

Теперь (при наличии категории Ψ, но пока не фиксируя ее) можно сказать, что любая система универсальных ограничений I_s^u должна выделять из каждого множества морфизмов категории Ψ соответствующее подмножество, состоящее из морфизмов, удовлетворяющих данным ограничениям. С содержательной точки зрения эти морфизмы можно охарактеризовать как «правильно устроенные» отображения.

Далее, универсальные ограничения должны быть замкнуты относительно суперпозиций, т.е. суперпозиции морфизмов, удовлетворяющих некоторой системе универсальных ограничений, также должны ей удовлетворять. Естественность этого требования в контексте алгебраического подхода абсолютно очевидна, поскольку в противном случае нельзя будет «по построению» гарантировать, что алгоритмы, построенные из «правильно устроенных» алгоритмических операций, корректирующих операций и решающих правил сами будут «правильно устроенными» отображениями, т.е. будет потеряна сама суть введения универсальных ограничений. Таким образом без требования замкнутости относительно суперпозиций рассмотрение универсальных ограничений невозможно.

Если, наконец, принять естественное требование, чтобы тождественные отображения объектов на себя удовлетворяли всем возможным системам универсальных ограничений, то из вышесказанного вытекает однозначный вывод: формальным эквивалентом понятия «система универсальных ограничений» являются соответствующие подкатегории категории Ψ, имеющие тот же класс объектов $\mathfrak{K}$. Так что если имеется система универсальных ограничений I_s^u, то она может рассматриваться просто как описание некоторой подкатегории Ψ_0 категории Ψ, т.е. $\mathfrak{M}[I_s^u] = \mathrm{Hom}_{\Psi_0}(\mathfrak{I}_i, \mathfrak{I}_f)$.

Рассмотрение в качестве формализации универсальных ограничений только подкатегорий категории Ψ, имеющих тот же класс объектов, что и сама Ψ, означает отсутствие ограничений на свободу выбора при разработке конкретных методов пространства возможных оценок $\mathfrak{I}_e$. Это условие не имеет принципиального характера и не исключает, конечно, того, что при изучении подкатегорий, имеющих более узкий класс объектов, могут быть получены полезные результаты. В настоящей работе будут рассматриваться только подкатегории основных категорий с классом объектов $\mathfrak{K}$, что не будет каждый раз оговариваться дополнительно.

Построение корректных алгоритмов при алгебраическом подходе проводится путем последовательного выбора алгоритмических операторов, корректирующих операций и решающих правил из соответствующих эвристических семейств отображений $\mathfrak{M}^0$, $\mathfrak{M}^1$ и $\mathfrak{F}$. При наличии системы универсальных ограничений I_s^u, которой соответствует подкатегория Ψ_0 категории Ψ, всегда предполагаются выполненными включения

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^0 &\subseteq \mathrm{Hom}_{\Psi_0}(\mathfrak{I}_i, \mathfrak{I}_e), \\ \mathfrak{F} &\subseteq \bigcup_{p=0}^{\infty} \mathrm{Hom}_{\Psi_0}(\mathfrak{I}_e^p, \mathfrak{I}_e), \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

$$\mathfrak{M}^1 \subseteq \bigcup_{p=0}^{\infty} \mathrm{Hom}_{\Psi_0}(\mathfrak{I}_e^p, \mathfrak{I}_f).$$

Это предположение накладывает естественные с содержательной точки зрения ограничения на выбор для решения задачи или класса задач модели алгоритмов и семейства корректирующих операций. Поскольку эти семейства отображений имеют эвристическое происхождение, выполнение условия (2.1.4) не может быть, видимо, обосновано формально. Отметим, однако, что при построении рассматриваемых семейств отображений на практике явно или неявно используются данные об «общей структуре» отображения, которое должен в конечном итоге реализовывать корректный алгоритм. Но именно такие данные и выражаются ограничениями I_s^u, т.е. подкатегорией Ψ_0. В силу этого условие (2.1.4) оказывается обычно выполненным «по построению».

2.2 Допустимые универсальные ограничения

Всякая система универсальных ограничений I_s^u описывается соответствующей подкатегорией категории Ψ. Однако, вообще говоря, не произвольные подкатегории имеет смысл рассматривать в качестве описаний систем универсальных ограничений. Действительно, при построении алгоритмов из алгоритмических операторов, корректирующих операций и решающих правил используются суперпозиции достаточно специального вида (2.1.2), которые не являются непосредственно суперпозициями морфизмов категории Ψ. Это обстоятельство заставляет требовать для подкатегорий, претендующих на роль универсальных ограничений, выполнения соответствующих условий, которые и вводятся в данном параграфе.

Определение 2.2.1. Подкатегория Ψ_0 категории Ψ называется *допустимой*, если для любой пары объектов $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ и любых двух морфизмов u и v из $\mathfrak{U}^{p_1}$ в $\mathfrak{V}^{r_1}$ и из $\mathfrak{U}^{p_2}$ в $\mathfrak{V}^{r_2}$ соответственно при произвольных натуральных p_1, r_1, p_2 и r_2, произведение $u \times v$ и диагонализация u_Δ являются морфизмами категории Ψ_0.

Итак, допуская вольность речи, можно сказать, что подкатегория Ψ_0 категории Ψ допустима, если она замкнута относительно произведений и диагонализации. Только допустимые подкатегории и могут быть использованы как системы универсальных ограничений.

Условия допустимости представляются чрезвычайно естественными, так что недопустимые подкатегории представляют собой по сути дела типичные «контрпримеры». Для полноты изложения и, главное, чтобы показать независимость условий замкнутости относительно произведений и диагонализации, приведем два примера не допустимых подкатегорий категории $\Psi_{\mathcal{M}}$, у которой в качестве объектов выступают просто множества (и, конечно, их декартовы степени).

Категория Ψ^1. Для любых различных объектов $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ множество $\mathrm{Hom}_{\Psi^1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$ пусто, а при произвольном p множество $\mathrm{Hom}_{\Psi^1}(\mathfrak{U}^p, \mathfrak{U}^p)$ содержит только тождественный морфизм. Легко видеть, что поскольку произведение тождественных отображений есть тождественное отображение, то категория Ψ^1 замкнута относительно произведений морфизмов. Она, однако, не замкнута относительно диагонализации. Действительно, при произвольном множестве $\mathfrak{U}$ диагонализацией тождественного отображения $\mathfrak{U}^2$ на $\mathfrak{U}^2$ (морфизма категории Ψ^1) является отображение u из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{U}^2$, задаваемое равенством $u(U) = (U, U)$, т.е. не морфизм категории Ψ^1.

Категория Ψ^2. Для любых двух объектов $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ множество морфизмов $\mathrm{Hom}_{\Psi^2}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$ не пусто, если $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}$, и тогда оно содержит только тождественный морфизм, либо если при некотором p выполнено $\mathfrak{V} = \mathfrak{U}^p$, и тогда множество морфизмов $\mathrm{Hom}_{\Psi^2}(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}^p)$ содержит только диагонализацию тождественного отображения $\mathfrak{U}^p$ на $\mathfrak{U}^p$. Категория Ψ^2 замкнута относительно диагонализации, однако не замкнута относительно произведений морфизмов. Действительно, пусть $\mathfrak{U}$ — произвольное множество и u — диагонализация тождественного отображения $\mathfrak{U}^2$ на $\mathfrak{U}^2$. Произведение $u \times u$ — отображение $\mathfrak{U}^2$ в $\mathfrak{U}^4$, не является морфизмом категории Ψ^2.

Допустим, что имеется некоторая система универсальных ограничений I_s^u, описываемая допустимой подкатегорией Ψ_0 категории Ψ. Пусть A — алгоритм, сформированный в виде
$$C \circ (F_1(B_1^1 \times \ldots \times B_{r_1}^1) \times \ldots \times F_p(B_1^p \times \ldots \times B_{r_p}^p))_\Delta,$$
где C есть p-арное решающее правило, $F_1, \ldots, F_p$ — корректирующие операции и $B_1^1, \ldots, B_{r_p}^p$ — алгоритмические операторы, причем C — морфизм категории Ψ_0 из $\mathfrak{I}_e^p$ в $\mathfrak{I}_f$, B_t^k — морфизмы категории Ψ_0 из $\mathfrak{I}_i$ в $\mathfrak{I}_e$ при $k \in \{1, \ldots, p\}$, F_k — морфизмы категории Ψ_0 из $\mathfrak{I}_e^{r_k}$ в $\mathfrak{I}_e$. Из соотношения (2.1.3) вытекает, что при всех $k \in \{1, \ldots, p\}$ результат применения корректирующей операции F_k к алгоритмическим операторам $B_1^k, \ldots, B_{r_k}^k$, т.е. отображение $F_k(B_1^k, \ldots, B_{r_k}^k)$ из $\mathfrak{I}_i$ в $\mathfrak{I}_f$ совпадает с суперпозицией $F_k \circ (B_1^k \times \ldots \times B_{r_k}^k)_\Delta$, которая в силу допустимости категории Ψ_0 оказывается ее морфизмом. Точно так же и оператор B_0 из $\mathfrak{I}_i$ в $\mathfrak{I}_e^p$, где
$$B_0 = \Big(F_1 \circ (B_1^1 \times \ldots \times B_{r_1}^1)_\Delta \times \ldots \times F_p \circ (B_1^p \times \ldots \times B_{r_p}^p)_\Delta\Big)_\Delta,$$
является морфизмом категории Ψ_0, и, наконец, сам алгоритм A как суперпозиция морфизмов C и B_0 — тоже морфизм категории Ψ_0, что и требуется.

Итак, применение в качестве формальных эквивалентов возникающих в реальных задачах универсальных ограничений только допустимых категорий обеспечивает корректность построений алгебраического подхода. В дальнейшем будут рассматриваться только такие категории, а при введении конкретных категорий или семейств категорий каждый раз будут проверяться условия допустимости.

2.3 Полные универсальные ограничения для алгоритмов классификации

Изучение универсальных ограничений для алгоритмов классификации проводится в рамках основной категории $\Psi_{q,l}$, где q — число одновременно рассматриваемых объектов и

l — число классов. Объектами этой категории являются пространства $q \times l$-матриц над произвольными множествами и все конечные декартовы степени таких постранств. Отметим, что изучение категории $\Psi_{q,l}$ при произвольных натуральных q и l есть на самом деле изучение счетного семейства таких категорий.

Системы универсальных ограничений для задач классификации описываются допустимыми подкатегориями категорий $\Psi_{q,l}$. Таким образом, если имеется задача, в которой универсальные ограничения выражены допустимой подкатегорией Ψ_0 категории $\Psi_{q,l}$, а локальные — парой матриц $(\widehat{I}_0, \widehat{\widehat{I}}_0)$, то задача сводится к построению морфизма A категории Ψ_0 из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}(\widetilde{\mathfrak{I}})$ такого, что $A(\widehat{I}_0) = \widehat{\widehat{I}}_0$.

Отметим, что хотя изучение задач с фиксированными количествами классов и объектов (что приводит к рассмотрению подкатегорий категорий $\Psi_{q,l}$) и представляет основной интерес, в некоторых случаях возникает потребность в алгоритмах, которые в «рабочем режиме» допускают изменения этих основных параметров (q и l). Это не означает, конечно, что в начальной структурной информации таких задач не содержатся матрица информации и информационная матрица при некоторых вполне определенных q и l. Иначе говоря, при постановке и таких задач должен быть описан набор классов $K_1, \ldots, K_l$ и должна быть задана контрольная совокупность $(S_1, \ldots, S_q)$, но при этом требуется, чтобы построенный в результате алгоритм был применим и к матрицам информации с произвольным числом строк, столбцов, или строк и столбцов одновременно.

Как уже говорилось в параграфе 1.5, одним из главных вопросов алгебраического подхода является проблема разрешимости (регулярности) изучаемых задач. Для полноценного рассмотрения этой проблемы требуется, чтобы универсальные ограничения удовлетворяли дополнительному условию полноты, которое и будет предметом обсуждения в настоящем параграфе.

Причины возникновения требования полноты для систем универсальных ограничений легко понять, если проанализировать определение понятия регулярности для задач классификации, введенное в гл. 1. Пусть имеется задача, в которой системе универсальных ограничений I_s^u соответствует допустимая подкатегория Ψ_0 категории $\Psi_{q,l}$, а система локальных ограничений выражена парой матриц $(\widehat{I}, \widehat{\widehat{I}})$. В этом случае условие разрешимости $\mathfrak{M}[I_s^u] \cap \mathfrak{M}[I_s^l] \neq \varnothing$ сводится к

$$\widehat{\widehat{I}} \in \mathfrak{M}[I_s^u](\widehat{I}) = \mathrm{Hom}_{\Psi_0}\left(\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I}), \mathfrak{C}_{q,l}(\widetilde{\mathfrak{I}})\right)(\widehat{I}), \tag{2.3.1}$$

а условие регулярности — к равенству

$$\mathfrak{M}[I_s^u](\widehat{I}) = \mathrm{Hom}_{\Psi_0}\left(\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I}), \mathfrak{C}_{q,l}(\widetilde{\mathfrak{I}})\right)(\widehat{I}) = \mathfrak{C}_{q,l}(\widetilde{\mathfrak{I}}). \tag{2.3.2}$$

Рассматривая системы универсальных ограничений, т.е. выражающие их подкатегории категории $\Psi_{q,l}$, естественно потребовать, чтобы универсальные ограничения сами по себе не запрещали существования регулярных задач. Это требование приводит к определению полных систем универсальных ограничений.

Определение 2.3.1. Подкатегория Ψ_0 категории $\Psi_{q,l}$ называется *полной категорией*, если для любых множеств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ при $|\mathfrak{U}| > 1$ выполнено равенство

$$\bigcup_{p=0}^{\infty} \mathrm{Hom}_{\Psi_0}\left(\mathfrak{C}^p_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})\right)\left(\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})\right) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V}). \tag{2.3.3}$$

Система универсальных ограничений I^u_s называется *полной*, если она выражается полной категорией.

Замечание. Полные категории не являются, вообще говоря, полными подкатегориями категорий $\Psi_{q,l}$ в смысле обычного определения ([14]) (для чего для всех объектов категории Ψ_0 требовалось бы совпадение множеств морфизмов категорий Ψ_0 и $\Psi_{q,l}$, что, поскольку рассматриваемые подкатегории имеют общий с $\Psi_{q,l}$ класс объектов, означало бы совпадение Ψ_0 с $\Psi_{q,l}$).

На содержательном уровне равенство (2.3.3) означает, что универсальные ограничения, выраженные категорией Ψ_0, не ограничивают заранее области значений морфизмов, т.е. для задач классификации не лимитируют априори возможные информационные матрицы. Исследование именно таких систем универсальных ограничений соответствует предположению о том, что они определяют общую структуру отображения, которое должно быть реализовано корректным алгоритмом, но не свойства этого отображения, связанные непосредственно с пространствами возможных начальных или финальных информаций.

Действительно, допустим, что при решении некоторой задачи классификации в качестве формализации системы универсальных ограничений используется категория Ψ_0, не обладающая свойством полноты. Это означает, что существуют множества $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ такие, что для них не выполнено условие (2.3.3). Если теперь предположить, что пространство допустимых начальных информаций у рассматриваемой задачи есть $\mathfrak{U}$ и пространство допустимых финальных информаций — $\mathfrak{V}$, то при использовании любых семейств алгоритмов, реализующих морфизмы категории Ψ_0, нельзя будет гарантировать разрешимость этой задачи на базе анализа ее матрицы информации, т.е. задача априори не будет регулярной. В силу этого проведение каких-либо построений для неполных категорий не согласуется с принятой в данной работе точкой зрения, согласно которой в качестве основных пространств (пространства допустимых начальных информаций, оценок и т.д.) возможно использование произвольных неодноэлементных множеств.

Требование выполнения равенства (2.3.3) можно охарактеризовать как условие «коллективной сюръективности» морфизмов полных категорий, причем это условие должно выполняться, например, и в случае, когда множество $\mathfrak{U}$ конечно, а $\mathfrak{V}$ — бесконечно. Ясно, что в такой ситуации отдельных сюръекций просто не существует, однако «коллективная сюръективность» вполне может иметь место.

Итак, в качестве формальных эквивалентов систем универсальных ограничений для задач классификации выступают полные допустимые категории — подкатегории категорий $\Psi_{q,l}$. В дальнейшем именно такие категории и будут изучаться в настоящей работе.

2.4 Независимость свойств допустимости и полноты

Подкатегории категорий $\Psi_{q,l}$, используемые как универсальные ограничения, должны удовлетворять условиям определений 2.2.1 и 2.3.1. Свойства, задаваемые этими определениями, т.е. свойства допустимости и полноты, независимы, так что даннная система определений является неизбыточной. Это будет показано в настоящем параграфе путем построения примеров — подкатегории Ψ^1 допустимой, но не полной, и подкатегорий Ψ^2 и Ψ^3 полных, но не допустимых.

Категория Ψ^1. Категория Ψ^1 — подкатегория категории $\Psi_{1,1}$, имеющая тот же класс объектов; морфизмы категории Ψ^1 — все отображения, возникающие при применении операций произведения и диагонализации к тождественным отображениям. Таким образом, при произвольных различных множествах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ и при произвольных натуральных p_1 и p_2 множество морфизмов категории Ψ^1 из $\mathfrak{C}^{p_1}_{1,1}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}_{1,1}(\mathfrak{V})$ пусто, также пусты и множества морфизмов из $\mathfrak{C}^{p_1}_{1,1}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}_{1,1}(\mathfrak{U})$ при $p_1 > p_2$. При $p_1 \leqslant p_2$ эти множества содержат морфизмы u такие, что

$$u(\widehat{U}_1, \ldots, \widehat{U}_{p_1}) = (\widehat{U}_1, \widehat{U}_1, \ldots, \widehat{U}_1,\ \widehat{U}_2, \ldots, \widehat{U}_2, \ldots, \widehat{U}_{p_1}).$$

Категория Ψ^1 допустима «по построению», однако она не полна, поскольку для любых различных множеств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ и любых натуральных чисел p_1 и p_2 соответствующее множество морфизмов $\mathrm{Hom}_{\Psi^1}\big(\mathfrak{C}^{p_1}_{1,1}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}^{p_2}_{1,1}(\mathfrak{V})\big)$ пусто.

Категория Ψ^2. Так же, как и Ψ^1, категория Ψ^2 является подкатегорией категории $\Psi_{1,1}$ с тем же классом объектов. При произвольных множествах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$, $p_1 > 1$ и произвольном p_2 морфизмами категории Ψ^2 из $\mathfrak{C}^{p_1}_{1,1}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}_{1,1}(\mathfrak{V})$ являются все отображения из $\mathfrak{C}^{p_1}_{1,1}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}_{1,1}(\mathfrak{V})$; при произвольном $\mathfrak{U}$ имеется единственный морфизм из $\mathfrak{C}_{1,1}(\mathfrak{U})$ в себя — тождественное отображение, остальные множества морфизмов пусты.

Нетрудно видеть, что категория Ψ^2 не замкнута относительно диагонализации и, следовательно, недопустима. Она, однако, полна. Действительно, пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — произвольные множества, $|\mathfrak{U}| > 1$. Пусть также $\widehat{V}$ — некоторая матрица из $\mathfrak{C}_{1,1}(\mathfrak{V})$. Определим отображение u из $\mathfrak{C}^{2}_{1,1}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}_{1,1}(\mathfrak{V})$ равенством $u(\widehat{U}_1, \widehat{U}_2) \equiv \widehat{V}$ — для произвольных матриц $\widehat{U}_1$ и $\widehat{U}_2$ из $\mathfrak{C}_{1,1}(\mathfrak{U})$. Это отображение является морфизмом категории Ψ^2, так что в силу произвольности выбора матрицы $\widehat{V}$ имеет место равенство

$$\mathrm{Hom}_{\Psi^2}(\mathfrak{C}^{2}_{1,1}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}_{1,1}(\mathfrak{V}))(\mathfrak{C}_{1,1}(\mathfrak{U})) = \mathfrak{C}_{1,1}(\mathfrak{V}),$$

и, тем более, выполнено (2.3.3).

Отметим, что категория Ψ^2 замкнута относительно произведений морфизмов, так что ее можно рассматривать и как дополнительный пример, доказывающий независимость свойства замкнутости относительно диагонализации от свойства замкнутости относительно произведений.

Категория Ψ^3**.** Снова, как и Ψ^2, категория Ψ^3 является подкатегорией категории $\Psi_{1,1}$ с тем же классом объектов. При произвольных множествах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ и произвольном p_2 морфизмами категории Ψ^3 из $\mathfrak{C}_{1,1}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}_{1,1}(\mathfrak{V})$ являются все отображения из $\mathfrak{C}_{1,1}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}_{1,1}(\mathfrak{V})$;

при $p_1 > 1$ и $p_2 \neq p_1$ или при $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{V}$ и $p_1 = p_2$ морфизмов категории Ψ^3 из $\mathfrak{C}^{p_1}_{1,1}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}_{1,1}(\mathfrak{V})$ нет; при $p_1 > 1$ и $p_2 = p_1$ и $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}$ имеется единственный морфизм — тождественное отображение на себя. Нетрудно видеть, что категория Ψ^3 незамкнута относительно произведений и, следовательно, недопустима. Полнота этой категории показывается аналогично предыдущему случаю.

Легко видеть, что категория Ψ^3 замкнута относительно диагонализации, так что и ее можно рассматривать как дополнительный пример, доказывающий независимость свойства замкнутости относительно произведений от свойства замкнутости относительно диагонализации.

Итак, все рассматриваемые условия, которым должны удовлетворять подкатегории категорий $\Psi_{q,l}$, определяющие универсальные ограничения для алгоритмов классификации, взаимно независимы.

2.5 Примеры систем универсальных ограничений

Задачи классификации с однородными классами

Предположим, что рассматривается задача, в которой имеется информация о том, что порядок, в котором анализируются классы, несущественен и что кроме прецедентных данных нет сведений о различиях классов. Отметим, что это не означает, что эти классы взаимно независимы. Например, конкретной информацией такого типа является условие $K_{j_1} \cap K_{j_2} = \varnothing$ при $j_1 \neq j_2$, так что объект, занесенный в один из классов, уже не может быть занесен в другой класс. Информацию такого типа можно охарактеризовать как однородную относительно классов и формализовать зто в виде системы универсальных ограничений.

Универсальные ограничения, выражающие однородность классов, состоят в том, что отображение, реализуемое корректным алгоритмом, должно коммутировать со всеми подстановками столбцов матриц информации, т.е. при любой перестановке столбцов в матрице информации точно так же должны переставляться столбцы матрицы, порожденной корректным алгоритмом.

Нетрудно видеть, что описанные ограничения действительно являются универсальными и что им соответствует подкатегория категории $\Psi_{q,l}$. Допустимость и полнота этой категории будет показана при рассмотрении семейства симметрических универсальных ограничений в § 4.2.

Отметим, что информация об однородности классов может сочетаться с еще какой-то информацией, выражаемой своей системой универсальных ограничений. В таком случае множества морфизмов категории, формализующей всю систему универсальных ограничений такой задачи, оказываются пересечениями соответствующих множеств морфизмов категорий, формализующих подсистемы. Пример такого рода для задач с непересекающимися классами подробно исследован в [138, 148] и описан в § 6.3.

Задачи классификации с однородными объектами

Предположим теперь, что рассматривается задача, в которой порядок, в котором анализируются объекты, несущественен, и что кроме прецедентных нет данных о различиях объектов. Информацию такого типа можно охарактеризовать как условие однородности объектов и тоже формализовать в виде системы универсальных ограничений.

Универсальные ограничения, выражающие однородность объектов, состоят в том, что отображение, реализуемое корректным алгоритмом должно коммутировать со всеми подстановками строк матриц информации, т.е. при любой перестановке строк матрицы информации точно так же должны переставляться строки матрицы, порожденной корректным алгоритмом.

Описанные ограничения универсальны. Результаты для них получаются путем «транспонирования» построений, проводимых для случая однородных классов.

Задачи классификации с независимыми классами

Рассматриваются задачи, в которых имеется информация о том, что факты принадлежности объектов классам попарно независимы. Отметим, что это не означает, что классы однородны. Формальным выражением данного условия является требование, чтобы (i, j)-е элементы порождаемых корректными алгоритмами информационных матриц зависели только от элементов соответствующего j-го столбца матриц информации.

Описанное требование легко распространяется на произвольные отображения пространств матриц одинакового размера друг в друга. Легко видеть также, что соответствующее свойство отображений сохраняется при суперпозициях, произведениях и диагонализации, так что ситуация описывается допустимой подкатегорией категории $\Psi_{q,l}$.

Задачи классификации с однородными и независимыми классами и объектами

Однородность и независимость различных объектов и классов в реальных задачах могут встречаться в самых различных сочетаниях. Полное рассмотрение соответствующих формальных конструкций будет проведено в гл. 4. Здесь же мы ограничимся последним важным примером — задачами, в которых все и объекты, и классы взаимно попарно независимы и однородны.

Формальным выражением информации о независимости является требование, чтобы (i, j)-й элемент порождаемой корректным алгоритмом информационной матрицы был функцией только от (i, j)-го элемента матрицы информации соответствующей задачи. Таким образом реализуемые корректными алгоритмами отображения из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}(\widetilde{\mathfrak{I}})$ должны допускать представления в виде

$$A(\widehat{I}) = A(\|I_{ij}\|_{q\times l}) = \|f_{ij}(I_{ij})\|_{q\times l}\,,$$

так что каждое такое отображение должно определяться ql функциями одного аргумента.

Условие однородности в данной ситуации естественным образом приводит к равенствам $f_{11} = f_{12} = \ldots = f_{ql}$, т.е. на самом деле реализуемые корректными алгоритмами отображения должны определяться единственной функцией из $\mathfrak{I}$ в $\widetilde{\mathfrak{I}}$.

Описанное требование, как и в предыдущем случае, легко распространяется на произвольные отображения пространств матриц одинакового размера друг в друга. Легко видеть также, что соответствующее свойство отображений сохраняется при суперпозициях, произведениях и диагонализации, так что ситуация снова описывается допустимой подкатегорией основной категории $\Psi_{q,l}$.

Задачи распознавания с монотонными признаками

Допустим теперь, что рассматривается задача, в которой заранее известно, что вхождение объекта в определенный класс монотонно зависит от некоторого признака (или признаков) в описании объектов. Здесь имеется в виду, что объекты представлены точками декартова произведения, координаты которого называются признаками, и что значения рассматриваемого признака образуют упорядоченное множество. Обсуждаемая информация может быть более точно определена условием: если описания двух объектов S_1 и S_2 различаются только значением выделенного признака, причем это значение у объекта S_1 больше, чем у S_2, и если объект S_2 занесен в класс K, то объект S_1 с необходимостью должен быть занесен в этот класс.

При решении задач такого типа с использованием алгебраических конструкций в качестве основной категории естественно использовать категорию, классом объектов которой являются пространства $q \times l$-матриц над упорядоченными множествами (и, как всегда, все конечные декартовы степени таких пространств). В этой категории описанное выше условие выделяет допустимую подкатегорию, т.е. оно может рассматриваться как универсальное ограничение. Отметим, что это ограничение может входить в систему вместе с ограничениями описанных в предыдущих пунктах типов.

Задачи прогнозирования

Методы алгебраического подхода наиболее детально разработаны для случая задач классификации с фиксированными количествами объектов и классов. Полученные для них результаты допускают использование и для решения задач прогнозирования. Обычно эта цель достигается следующим образом. В качестве независимых объектов рассматриваются последовательности, описывающие поведение прогнозируемых явлений, семейство возможных прогнозов разбивается на конечное число классов и ставится задача отнесения объектов классам, что является в таком случае прогнозированием.

В некоторых случаях такой подход приводит к удовлетворительным результатам, однако его недостатком является полное отсутствие учета динамического характера изучаемых объектов и их взаимосвязей. Так, часто из-за недостаточного количества исходных последовательностей представляется полезным изучать в качестве отдельных объектов подпоследовательности. При этом такие объекты оказываются, конечно, уже не независимыми. Возникающие между ними естественные связи при этом чаще всего описываются приведенными в предыдущем пункте универсальными ограничениями типа монотонности.

Кроме того, для задач прогнозирования оказывается возможным использовать специфическое универсальное ограничение, которое формализует требование снижения влияния данных, далеко отстоящих по времени, на прогнозируемое значение. Это ограничение естественным образом описывается на языке дифференцируемых функций действительных переменных.

Допустим для простоты, что требуется построить функцию, отображающую пространство действительных наборов переменной длины в множество действительных чисел — прогнозируемых значений, причем будем считать, что элементы наборов имеют ту же природу, что и интересующий нас прогноз. В этом случае для прогнозируемой величины x_t будет использоваться соотношение $x_t = F(x_{t-1}, \ldots, x_{t-k})$. Применяя его при различных t, получаем $x_t = F(F(x_{t-2}, \ldots, x_{t-k-1}), x_{t-2}, \ldots, x_{t-k})$ и т.д. Поскольку только часть значений x_t здесь точна, т.е. получена из эксперимента, то естественным оказывается требование, чтобы все частные производные F были ограничены по модулю константой 1. Таким образом возникает ограничение на вид искомой функции, которое можно рассматривать как универсальное ограничение и, следовательно, применять для решения такой задачи корректирующие операции.

Категория, которая описывает универсальные ограничения для задач прогнозирования, имеет в качестве морфизмов непрерывно дифференцируемые фукнции $F(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющие условию $\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial F}{\partial x_i} \right| < 1$.

Ряд примеров возникающих в практических и модельных задачах систем универсальных ограничений может, конечно, быть продолжен, однако целью настоящей работы является прежде всего изучение связанных с универсальными ограничениями общих проблем, что и составит основное содержание последующих глав.

Глава 3

Проблема регулярности (разрешимости) задач классификации

3.1 О корректности постановки задач классификации

В настоящей главе будут описаны главные общие результаты теории универсальных и локальных ограничений для задач и алгоритмов классификации. Эти результаты и сам ход их получения могут рассматриваться и как «модель» для разработки аналогичных «микротеорий» для иных классов задач преобразования информации и соответствующих алгоритмов.

Прецедентная или, в нашей терминологии — локальная информация в задачах классификации, представляющая собой описания некоторых объектов и данные о принадлежности этих объектов классам, может в реальных ситуациях содержать ошибки. При отсутствии дополнительной информации, по-видимому, единственный тип ошибки — это ситуация, когда для одного объекта оказывается по-разному задана его принадлежность некоторому классу. Когда же имеется дополнительная (универсальная) информация об общих зависимостях данных об объектах и классах, возникает возможность исследовать вопрос о непротиворечивости локальной и универсальной информации, который в таком случае оказывается по сути дела вопросом о разрешимости соответствующей задачи.

Поскольку при нашем подходе постановки задач сводятся к описанию множеств допустимых отображений из пространства возможных начальных информаций $\mathfrak{I}_i$ в пространство возможных финальных информаций $\mathfrak{I}_f$, а эти множества рассматриваются как пересечения $\mathfrak{M}[I_s^u] \cap \mathfrak{M}[I_s^l]$, то и вопрос о разрешимости, как уже говорилось выше, ставится формально как вопрос о непустоте таких пересечений.

Отметим еще раз, что поскольку универсальная информация считается равноправной с прецедентной, то при обнаружении противоречий, т.е. при установлении факта неразрешимости, оказывается возможным говорить о некорректности самой постановки задачи, т.е. об ошибках в представленной реальной информации, делающих решение невозможным.

Рассмотрение наряду с проблемой разрешимости ее обобщения (проблемы регулярности) приводит к необходимости изучения соответствующих свойств семейств морфизмов категорий, выражающих универсальные ограничения. Эти абстрактные свойства семейств отображений будут предметом анализа в следующем параграфе. Следует сказать, что поскольку основное для задач классификации понятие регулярности выражается условием «при данной матрице информации и произвольной информационной матрице задача разрешима», то основным формальным объектом изучения оказывается свойство «коллективной сюръективности» семейств отображений. Соответствующие построения имеют чисто математический характер, и можно сказать, что теория задач и алгоритмов классификации является лишь поводом для их проведения.

На базе понятий и результатов параграфа 3.2 в следующем за ним параграфе будет получен общий критерий разрешимости и регулярности задач классификации. Этот критерий может использоваться как для анализа конкретных задач, так и для исследования эвристических семейств отображений, применяемых при построении решений. Проверки разрешимости и регулярности задач классификации требуют при этом проведения дополнительного изучения конкретных категорий, выражающих универсальные ограничения. Такое изучение для многих случаев будет проведено в следующей главе. Для изучения же эвристических семейств отображений при наличии критериев регулярности оказывается возможным использовать общие критерии полноты, получению которых посвящено содержание параграфов 3.4 и 3.5.

Совокупность критериев регулярности задач и полноты семейств морфизмов образует систему глубоко внутренне связанных условий. Эти внутренние связи рассматриваются в последнем параграфе главы.

3.2 Базы полных допустимых категорий

На протяжении параграфов 3.2–3.4 будем считать, что зафиксирована некоторая полная допустимая категория Ψ_0 — подкатегория категории $\Psi_{q,l}$, и при произвольных множествах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ и произвольном подмножестве X пространства матриц $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ будем использовать следующие сокращенные обозначения:

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{V}) &= \mathrm{Hom}_{\Psi_0}(\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}),\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V}));\\
\mathcal{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{V}) &= \bigcup_{p=0}^{\infty}\mathrm{Hom}_{\Psi_0}(\mathfrak{C}^p_{q,l}(\mathfrak{U}),\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V}));\\
\mathrm{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{V})(X) &= \{\, u(\widehat{U}) \mid u\in \mathrm{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{V}),\ \widehat{U}\in X\,\};\\
\mathcal{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{V})(X) &= \bigcup_{p=0}^{\infty}\{\, u(\widehat{U}_1,\dots,\widehat{U}_p) \mid u\in \mathcal{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{V}),\ (\widehat{U}_1,\dots,\widehat{U}_p)\in X^p\,\}.
\end{aligned}$$

Понятие полной категории введено определением 2.3.1 при использовании «целых» пространств матриц $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$. Поскольку при решении задач классификации реально возникают собственные подмножества таких пространств, то требуется и соответствующее общее понятие, связывающее подмножества пространств матриц и системы универсальных ограничений. Этим понятием, центральным при изучении проблемы регулярности и полноты, оказывается понятие базы:

Определение 3.2.1. Пусть $\mathfrak{U}$ — множество и X — подмножество пространства матриц $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$. Множество X называется *базой категории* Ψ_0 *в* $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ или просто базой категории Ψ_0, если выполнено равенство $\mathcal{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{U})(X) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$.

Таким образом, множество матриц X является базой категории Ψ_0, если любая матрица из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ может быть получена из входящих в X матриц с помощью морфизмов категории Ψ_0. Существенно, что при этом не требуется единственности представления для матриц из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$, так что любое надмножество базы является базой. Отметим, что понятие базы аналогично понятию подмножества линейного векторного пространства, линейная оболочка которого совпадает со всем пространством.

Свойство «быть базой категории Ψ_0» определено для подмножеств X пространств матриц $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ только на основе морфизмов, отображающих $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в себя или декартовы степени $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$. Поскольку основной интерес представляют в конечном итоге отображения из одного пространства матриц в другое, то необходимо выяснение роли баз при таких переходах, что и будет нашей ближайшей целью.

Определение 3.2.2. Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — некоторые произвольные множества, $|\mathfrak{U}| > 1$ и X — подмножество пространства матриц $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$. Множество X называется *базой категории* Ψ_0 *в* $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ *для* $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$, если выполнено равенство $\mathcal{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{V})(X) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$.

Лемма 3.2.1. Для произвольных множеств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ при $|\mathfrak{U}| > 1$ и $|\mathfrak{V}| > 1$ и любого подмножества X пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ высказывания «X — база категории Ψ_0 в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$» и «$X$ — база категории Ψ_0 в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ для $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$» эквивалентны.

Доказательство. Пусть подмножество X пространства матриц $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ является базой категории Ψ_0 в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$. Это означает, что для любой матрицы $\widehat{U}$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ при подходящих $\widehat{U}_1,\dots,\widehat{U}_p$ из X и при некотором морфизме u категории Ψ_0 из $\mathfrak{C}^p_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ выполнено равенство

$$\widehat{U} = u(\widehat{U}_1,\dots,\widehat{U}_p). \tag{3.2.1}$$

Из того, что категория Ψ_0 полна, вытекает, что для произвольного элемента $\widehat{V}$ пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$ существует представление в виде

$$\widehat{V} = v(\widehat{U}_1,\dots,\widehat{U}_r), \tag{3.2.2}$$

где $\widehat{U}_1,\dots,\widehat{U}_r$ — матрицы из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ и v — морфизм категории Ψ_0 из $\mathfrak{C}^r_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$.

Зафиксируем для каждой из матриц $\widehat{U}_1,\dots,\widehat{U}_r$ из (3.2.2) входящие в (3.2.1) матрицы $\widehat{U}^k_1,\dots,\widehat{U}^k_{p_k}$ и морфизм u_k, т.е. будем считать, что

$$\widehat{U}_k = u_k(\widehat{U}^k_1,\dots,\widehat{U}^k_{p_k}), \tag{3.2.3}$$

где $u_k \in \mathcal{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{U})$ и $(\widehat{U}^k_1,\dots,\widehat{U}^k_{p_k}) \in X^k$ при $k \in \{1,\dots,r\}$.

Из равенств (3.2.2) и (3.2.3) получаем

$$\widehat{V}_k = v^*(\widehat{U}^1_1,\dots,\widehat{U}^1_{p_1},\widehat{U}^2_1,\dots,\widehat{U}^k_{p_k}), \tag{3.2.4}$$

где $v^* = v\circ(u_1\times\ldots\times u_r)$ — морфизм категории Ψ_0, т.к. по предположению эта категория допустима. Итак, для произвольной наперед заданной матрицы $\widehat{V}$ из пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$

существует представление
$$\widehat{V} = u(\widehat{U}_1, \ldots, \widehat{U}_s), \tag{3.2.5}$$
где u — морфизм категории Ψ_0 и $\widehat{U}_1, \ldots, \widehat{U}_s$ — матрицы из множества X. Отсюда вытекает, что
$$\mathcal{H}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})(X) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V}), \tag{3.2.6}$$
т.е. что множество X является базой категории Ψ_0 в пространстве $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ для $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$.

Допустим теперь, что $X \subseteq \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}), X$ — база категории Ψ_0 в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ для $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$ и что $\widehat{U}$ — произвольная матрица из пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$. Из предположения о полноте категории Ψ_0 вытекает, что для матрицы $\widehat{U}$ существует представление в виде
$$\widehat{U} = u(\widehat{V}_1, \ldots, \widehat{V}_p), \tag{3.2.7}$$
где $\widehat{V}_1, \ldots, \widehat{V}_p$ — подходящие матрицы из пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$ и u — морфизм категории Ψ_0 из $\mathfrak{C}^p_{q,l}(\mathfrak{V})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$.

Поскольку X — база категории Ψ_0 в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ для $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$, каждая из матриц $\widehat{V}_1, \ldots, \widehat{V}_p$ может быть представлена в виде
$$\widehat{V}_k = v_k(\widehat{U}^k_1, \ldots, \widehat{U}^k_{r_k}), \tag{3.2.8}$$
где $\widehat{U}^k_1, \ldots, \widehat{U}^k_{r_k}$ — матрицы из множества X и v_k — морфизмы категории Ψ_0 при $k \in$ $\in \{1, \ldots, p\}$.

Из (3.2.7) и (3.2.8) получаем
$$\widehat{U} = u^*(\widehat{U}^1_1, \ldots, \widehat{U}^p_{r_p}), \tag{3.2.9}$$
где $u^* = u \circ (v_1 \times \ldots \times v_p)$ — морфизм категории Ψ_0 в силу предположения о том, что Ψ_0 — допустима.

Итак, для $\widehat{U}$ существует представление
$$\widehat{U} = u(\widehat{U}_1, \ldots, \widehat{U}_s), \tag{3.2.10}$$
где $\widehat{U}_1, \ldots, \widehat{U}_s$ — матрицы из X и u — морфизм категории Ψ_0 из $\mathfrak{C}^s_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$.

Представление (3.2.10) может быть построено для произвольной матрицы $\widehat{U}$, так что для множества X выполнено равенство $\mathcal{H}(\mathfrak{U}, \mathfrak{U})(X) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$, означающее, что X — база категории Ψ_0 в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$.

Лемма доказана.

Итак, понятия баз, введенные определениями 3.2.1 и 3.2.2, для полных допустимых категорий совпадают. Отметим, что определения 3.2.1 и 3.2.2 применимы, вообще говоря, не только к полным допустимым подкатегориям категории $\Psi_{q,l}$. Однако для категории, не обладающей свойством полноты или допустимости, утверждение леммы 3.2.1 может оказаться неверным. Например, для категории Ψ^1, описанной в параграфе 2.4, само пространство $\mathfrak{C}_{1,1}(\mathfrak{U})$ при любом множестве $\mathfrak{U}$ является базой в этом пространстве, но не является базой в нем для любого другого пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$.

3.3 Общий критерий регулярности задач классификации

При использовании конструкций алгебраического подхода основной схемой перехода от одного пространства матриц к другому является схема

$$\begin{array}{ccc}\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I}) & \xrightarrow{\mathfrak{M}} & \mathfrak{C}_{q,l}(\widetilde{\mathfrak{I}}) \\ \Big\downarrow \mathfrak{M}^0 & & \Big\uparrow \mathfrak{M}^1 \\ \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{R}) & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{R})\end{array} \tag{3.3.1}$$

где $\mathfrak{M}^0$ — модель алгоритмических операторов, $\mathfrak{F}$ — семейство корректирующих операций, $\mathfrak{M}^1$ — семейство решающих правил и $\mathfrak{M}$ — модель алгоритмов-суперпозиций. При этом существенно, что множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^0$ состоят из унарных отображений, а $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}^1$ — из отображений произвольных арностей. В предельном (конечно, чисто теоретическом) случае в качестве указанных семейств отображений могут выступать просто соответствующие множества морфизмов категории, выражающей универсальные ограничения. Поэтому для того, чтобы получить условия, которым независимо от моделей алгоритмов должны удовлетворять задачи, т.е. для того, чтобы получить общий критерий регулярности, приходится рассматривать схему

$$\begin{array}{ccc}\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}) & \xrightarrow{\mathrm{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{V})} & \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V}) \\ \Big\downarrow \mathrm{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{W}) & & \Big\uparrow \mathcal{H}(\mathfrak{W},\mathfrak{V}) \\ \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W}) & \xrightarrow{\mathcal{H}(\mathfrak{W},\mathfrak{W})} & \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})\end{array} \tag{3.3.2}$$

для допустимых полных категорий Ψ_0 и для произвольных неодноэлементных множеств $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{W}$.

Лемма 3.3.1. Пусть $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ и $\mathfrak{W}$ — произвольные неодноэлементные множества, X и Y — подмножества пространств матриц $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ и $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})$ соответственно. Тогда:

— для того, чтобы было выполнено любое из равенств

$$\mathrm{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{V})(X) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V}) \tag{3.3.3}$$

$$\mathcal{H}(\mathfrak{W},\mathfrak{V})\Big(\mathcal{H}(\mathfrak{W},\mathfrak{W})(\mathrm{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{W})(X))\Big) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V}), \tag{3.3.4}$$

необходимо, чтобы множество X было базой категории Ψ_0 в пространстве $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$;

— для того, чтобы было выполнено любое из равенств

$$\mathcal{H}(\mathfrak{W},\mathfrak{V})(Y) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V}) \tag{3.3.5}$$

$$\mathcal{H}(\mathfrak{W},\mathfrak{V})(\mathcal{H}(\mathfrak{W},\mathfrak{W})(Y)) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V}), \tag{3.3.6}$$

необходимо и достаточно, чтобы множество Y было базой категории Ψ_0 в пространстве $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})$.

Доказательство. При выполнении равенства (3.3.3) тем более выполнено равенство $\mathcal{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{V})(X) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$, а это означает, что множество X являеся базой категории Ψ_0 в пространстве $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ (лемма 3.2.1).

Равенство (3.3.4) влечет равенство (3.3.3), поскольку для допустимой категории Ψ_0 и произвольного подмножества X пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ выполнено включение

$$\mathcal{H}(\mathfrak{W},\mathfrak{V})\,(\mathcal{H}(\mathfrak{W},\mathfrak{W})(\mathrm{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{W})(X))) \subseteq \mathrm{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{V})(X).$$

Таким образом, наличие у множества X свойства быть базой категории Ψ_0, необходимое для (3.3.3), оказывается необходимым и для (3.3.4).

Равенство (3.3.5) совпадает с определением базы категории Ψ_0 в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})$ для $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$, и доказательство сводится к ссылке на лемму 3.2.1.

Равенство (3.3.6) эквивалентно равенству (3.3.5), т.к. для любого подмножества Y пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})$ выполнено равенство

$$\mathcal{H}(\mathfrak{W},\mathfrak{V})\,(\mathcal{H}(\mathfrak{W},\mathfrak{W})(Y)) = \mathcal{H}(\mathfrak{W},\mathfrak{V})(Y).$$

Лемма доказана.

Замечание. Утверждение леммы для множества X не может быть усилено, т.е. неверно, что для выполнения равенств (3.3.3) или (3.3.4) достаточно, чтобы X было базой категории Ψ_0 в пространстве $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$. Чтобы показать это, рассмотрим категорию Ψ^1, для которой данное усиление утверждения леммы не имеет места.

Класс объектов категории Ψ^1 тот же, что и у категории $\Psi_{q,l}$, т.е. ее объектами являются пространства $q\times l$-матриц над произвольными множествами и все конечные декартовы степени таких пространств. При этом считается, что в каждом пространстве матриц $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ выделена матрица $\widehat{\mathfrak{U}}_0$.

Для произвольных различных множеств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ и любых натуральных чисел p_1 и p_2 множество морфизмов категории Ψ^1 из $\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V})$ содержит все отображения u из $\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V})$ такие, что сужение u на любое из множеств $\{\widehat{U},\widehat{U}_0\}$, где $\widehat{U}$ — произвольная и $\widehat{U}_0$ — выделенная матрицы из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$, является отображением в одноэлементное множество $\{(\widehat{V}_0,\dots,\widehat{V}_0)\}$, где $\widehat{V}_0$ — матрица, выделенная в пространстве $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$. Иначе говоря, морфизмами категории Ψ^1 являются те и только те отображения, которые принимают фиксированное значение — вектор $(\widehat{V}_0,\dots,\widehat{V}_0)$ на наборах матриц, в которые вместе с $\widehat{U}_0$ входит только еще одна матрица $\widehat{U}$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$. Итак, при $\mathfrak{U}\neq\mathfrak{V}$ морфизмы категории Ψ_0 — это отображения, удовлетворяющие условию

$$\forall(\widehat{U}_1,\dots,\widehat{U}_{p_1})\Big(\,(\exists\widehat{U}\ (\widehat{U}_1,\dots,\widehat{U}_{p_1})\in\{\widehat{U},\widehat{U}_0\}^{p_1})\ \to\ (u(\widehat{U}_1,\dots,\widehat{U}_{p_1}) = (\widehat{V}_0,\dots,\widehat{V}_0))\,\Big),\quad (3.3.7)$$

где $(\widehat{U}_1,\dots,\widehat{U}_{p_1})\in\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$ и $\widehat{U}\in\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$.

При произвольном множестве $\mathfrak{U}$ и произвольных натуральных p_1 и p_2 морфизмами категории Ψ^1 из $\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{U})$ являются все отображения u из $\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{U})$ такие, что при произвольной матрице $\widehat{U}$ сужение u на $\{\widehat{U},\widehat{U}_0\}^{p_1}$ есть отображение в $\{\widehat{U},\widehat{U}_0\}^{p_2}$, где $\widehat{U}_0$

— матрица, выделенная в пространстве $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$. Так что морфизмы категории Ψ^1 из $\mathfrak{C}_{q,l}^{p_1}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}^{p_2}(\mathfrak{U})$ — это отображения, удовлетворяющие условию

$$\forall(\widehat{U}_1,\dots,\widehat{U}_{p_1})\Big(\ (\exists\widehat{U}\ (\widehat{U}_1,\dots,\widehat{U}_{p_1})\in\{\widehat{U},\widehat{U}_0\}^{p_1})\ \to\ (u(\widehat{U}_1,\dots,\widehat{U}_{p_1})\in\{\widehat{U},\widehat{U}_0\}^{p_2})\ \Big), \qquad (3.3.8)$$

где $(\widehat{U}_1,\dots,\widehat{U}_{p_1})\in\mathfrak{C}_{q,l}^{p_1}(\mathfrak{U})$ и $\widehat{U}\in\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$.

Покажем прежде всего, что категория Ψ^1 описана корректно, т.е. что указанные выше множества отображений действительно можно рассматривать как множества морфизмов. Для этого необходимо показать, что суперпозиции отображений, выделенных как морфизмы, снова являются морфизмами и что тождественные отображения — морфизмы.

Пусть u и v, где $u:\mathfrak{C}_{q,l}^{p_1}(\mathfrak{U})\to\mathfrak{C}_{q,l}^{p_2}(\mathfrak{V})$ и $v:\mathfrak{C}_{q,l}^{p_2}(\mathfrak{V})\to\mathfrak{C}_{q,l}^{p_3}(\mathfrak{W})$, — морфизмы категории Ψ^1, $\widehat{U}$ — произвольная матрица из пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ и $\widehat{U}_0$, $\widehat{V}_0$ и $\widehat{W}_0$ — матрицы, выделенные в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$, $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$ и $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})$ соответственно.

Пусть теперь $(\widehat{U}_1,\dots,\widehat{U}_{p_1})$ — произвольный набор матриц из множества $\{\widehat{U},\widehat{U}_0\}^{p_1}$.

При $\mathfrak{U}\neq\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{V}\neq\mathfrak{W}$ для суперпозиции $v\circ u$ отображений u и v из (3.3.7) имеем:

$$v\circ u(\widehat{U}_1,\dots,\widehat{U}_{p_1})=v(u(\widehat{U}_1,\dots,\widehat{U}_{p_1}))=v(\widehat{V}_0,\dots,\widehat{V}_0)=(\widehat{W}_0,\dots,\widehat{W}_0).$$

Если $\mathfrak{U}=\mathfrak{V}\neq\mathfrak{W}$, то из (3.3.8) получаем равенство

$$v\circ u(\widehat{U}_1,\dots,\widehat{U}_{p_1})=v(\widehat{U}'_1,\dots,\widehat{U}'_{p_2}),$$

где $(\widehat{U}'_1,\dots,\widehat{U}'_{p_2})$ — набор из множества $\{\widehat{U},\widehat{U}_0\}^{p_2}$. Используя теперь (3.3.7), имеем

$$v(\widehat{U}'_1,\dots,\widehat{U}'_{p_2})=(\widehat{W}_0,\dots,\widehat{W}_0).$$

Аналогично при $\mathfrak{U}\neq\mathfrak{V}=\mathfrak{W}$ получаем цепочку соотношений

$$v\circ u(\widehat{U}_1,\dots,\widehat{U}_{p_1})=v(\widehat{V}_0,\dots,\widehat{V}_0)=(\widehat{V}_0,\dots,\widehat{V}_0)\in\{\widehat{V}_0,\widehat{V}_0\}^{p_3}$$

и при $\mathfrak{U}=\mathfrak{V}=\mathfrak{W}$ — равенство

$$v\circ u(\widehat{U}_1,\dots,\widehat{U}_{p_1})=v(\widehat{U}'_1,\dots,\widehat{U}'_{p_2}),$$

где $(\widehat{U}'_1,\dots,\widehat{U}'_{p_2})\in\{\widehat{U},\widehat{U}_0\}^{p_2}$, а потому выполнено включение $v(\widehat{U}'_1,\dots,\widehat{U}'_{p_2})\in\{\widehat{U},\widehat{U}_0\}^{p_3}$.

Итак, суперпозиции описанных отображений удовлетворяют условиям (3.3.7) или (3.3.8). Очевидно также, что и тождественные отображения удовлетворяют условию (3.3.8), так что Ψ^1 — действительно подкатегория категории $\Psi_{q,l}$.

Покажем теперь, что категория Ψ^1 допустима.

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — различные произвольные множества и u — отображение из $\mathfrak{C}_{q,l}^{p_1}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})^{p_2}$, удовлетворяющее условию (3.3.7). Диагонализация этого отображения, т.е. отображение u_Δ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}^{p_2}(\mathfrak{V})$, определенное для всех $U\in\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ равенством

$$u_\Delta(\widehat{U})=u(\widehat{U},\dots,\widehat{U})=(\widehat{V}_0,\dots,\widehat{V}_0),$$

также удовлетворяет условию (3.3.7).

Если же $u : \mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U}) \to \mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{U})$, $\mathfrak{U}$ — произвольное множество и u удовлетворяет условию (3.3.8), то для u_Δ и произвольной матрицы $\widehat{U}$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ имеем включение

$$u_\Delta(\widehat{U}) = u(\widehat{U}, \ldots, \widehat{U}) \in \{\widehat{U}, \widehat{U}_0\}^{p_2},$$

т.е. u_Δ также удовлетворяет условию (3.3.8).

Итак, Ψ^1 замкнута относительно диагонализации.

Пусть теперь $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — произвольные различные множества и u и v — отображения из $\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})^{p_2}$ и из $\mathfrak{C}^{r_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})^{r_2}$ соответственно, удовлетворяющие условию (3.3.7). Пусть также $\widehat{U}$ — произвольная матрица из пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ и $(\widehat{U}_1, \ldots, \widehat{U}_{p_1+r_1})$ — произвольный набор из $\{\widehat{U}, \widehat{U}_0\}^{p_1+r_1}$. В этом случае $(\widehat{U}_1, \ldots, \widehat{U}_{p_1}) \in$ $\in \{\widehat{U}, \widehat{U}_0\}^{p_1}$ и $(\widehat{U}_{p_1+1}, \ldots, \widehat{U}_{p_1+r_1}) \in \{\widehat{U}, \widehat{U}_0\}^{r_1}$, так что из (3.3.7) получаем $u(\widehat{U}_1, \ldots, \widehat{U}_{p_1}) =$ $= (\widehat{V}_0, \ldots, \widehat{V}_0)$ и $v(\widehat{U}_{p_1+1}, \ldots, \widehat{U}_{p_1+r_1}) = (\widehat{V}_0, \ldots, \widehat{V}_0)$.

Из последних равенств вытекает, что

$$u \times v(\widehat{U}_1, \ldots, \widehat{U}_{p_1+r_1}) = \Big(u(\widehat{U}_1, \ldots, \widehat{U}_{p_1}), v(\widehat{U}_{p_1+1}, \ldots, \widehat{U}_{p_1+r_1})\Big) = (\widehat{V}_0, \ldots, \widehat{V}_0).$$

Итак, произведение $u \times v$ удовлетворяет условию (3.3.7) и потому является морфизмом категории Ψ^1.

Если же при некотором произвольном множестве $\mathfrak{U}$ даны морфизмы u из $\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{U})$ и v из $\mathfrak{C}^{r_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{r_2}_{q,l}(\mathfrak{U})$, то, как и выше, для произвольного набора матриц $(\widehat{U}_1, \ldots, \widehat{U}_{p_1+r_1}) \in \{\widehat{U}, \widehat{U}_0\}^{p_1+r_1}$ (при произвольной матрице $\widehat{U}$) и для удовлетворяющих условию (3.3.8) u и v имеем $u(\widehat{U}_1, \ldots, \widehat{U}_{p_1}) \in \{\widehat{U}, \widehat{U}_0\}^{p_2}$ и $v(\widehat{U}_{p_1+1}, \ldots, \widehat{U}_{p_1+r_1}) \in \{\widehat{U}, \widehat{U}_0\}^{r_2}$, так что

$$v \times u(\widehat{U}_1, \ldots, \widehat{U}_{p_1+r_1}) = \Big(u(\widehat{U}_1, \ldots, \widehat{U}_{p_1}), v(\widehat{U}_{p_1+1}, \ldots\ldots, \widehat{U}_{p_1+r_1})\Big) \in \{\widehat{U}, \widehat{U}_0\}^{p_2+r_2},$$

т.е. для произведения $u \times v$ условие (3.3.8) снова выполнено и $u \times v$ — морфизм рассматриваемой категории Ψ^1.

Допустимость категории Ψ^1 доказана.

Покажем теперь что допустимая категория Ψ^1 полна, т.е. что при любом неодноэлементном множестве $\mathfrak{U}$ и произвольном множестве $\mathfrak{V}$ выполнено $\mathcal{H}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})(\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$.

Пусть $\widehat{U}^0_1$ и $\widehat{U}^0_2$ — матрицы из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ такие, что $\widehat{U}^0_1 \neq \widehat{U}^0_2$, $\widehat{U}^0_1 \neq \widehat{U}_0$ и $\widehat{U}^0_2 \neq \widehat{U}_0$, где $\widehat{U}_0$ — матрица, выделенная в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$. Существование матриц $\widehat{U}^0_1$ и $\widehat{U}^0_2$ в пространстве $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ гарантируется предположением о неодноэлементности $\mathfrak{U}$ и о том, что $ql > 1$. Сопоставим каждой матрице $\widehat{V}$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$ отображение $u_{\widehat{V}}$ из $\mathfrak{C}^2_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$ такое, что для всех $(\widehat{U}_1, \widehat{U}_2)$ из $\mathfrak{C}^2_{q,l}(\mathfrak{U})$

$$u_{\widehat{V}}(\widehat{U}_1, \widehat{U}_2) = \begin{cases} \widehat{V} & \text{при } (\widehat{U}_1, \widehat{U}_2) = (\widehat{U}^0_1, \widehat{U}^0_2) \\ \widehat{V}_0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Легко видеть, что при $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{V}$ отображения $u_{\widehat{V}}$ удовлетворяют условию (3.3.7), а при $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}$ — (3.3.8), так что отображения $u_{\widehat{V}}$ являются морфизмами категории Ψ^1. Ясно также, что когда индекс $\widehat{V}$ пробегает $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$, это же пространство пробегается значением $u_{\widehat{V}}(\widehat{U}_1^0, \widehat{U}_2^0)$, так что

$$\bigcup_{\widehat{V}\in\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})} \left\{u_{\widehat{V}}(\widehat{U}_1^0, \widehat{U}_2^0)\right\} = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$$

и, тем более, $\mathcal{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{V})(\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$, что и требуется.

Итак, показано, что Ψ^1 — полная допустимая категория. Из построения, проведенного при доказательстве полноты, нетрудно усмотреть, что при любом множестве $\mathfrak{U}$ подмножество X пространства матриц $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ является базой категории Ψ^1, если в X содержатся по меньшей мере две отличные от выделенной в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ матрицы. Иных баз у категории Ψ^1 нет.

Допустим теперь, что множества $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{W}$ в формулировке леммы 3.3.1 попарно различны и что X — база категории Ψ^1 в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$. Из условия (3.3.7) получаем

$$\mathrm{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{V})(X) = \{\widehat{V}_0\} \neq \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$$

и

$$\mathcal{H}(\mathfrak{W},\mathfrak{V})\Big(\mathcal{H}(\mathfrak{W},\mathfrak{W})(\mathrm{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{W})(X))\Big) = \mathcal{H}(\mathfrak{W},\mathfrak{V})\Big(\mathcal{H}(\mathfrak{W},\mathfrak{W})(\{\widehat{W_0}\})\Big) =$$
$$= \mathcal{H}(\mathfrak{W},\mathfrak{V})(\{\widehat{W_0}\}) = \{\widehat{V}_0\} \neq \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V}),$$

т.е. множество X в данном случае — база, для которой равенства (3.3.3) и (3.3.4) не выполнены, так что для их выполнения действительно лишь необходимо, но не достаточно, чтобы X было базой.

Утверждение леммы 3.3.1 в основном сводится к тому, что для того, чтобы из подмножества пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ или из подмножеств любого из экземпляров пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})$ в схеме (3.3.1) в ее рамках можно было получить все пространство $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$, необходимо, чтобы рассматриваемые подмножества были базами категории Ψ_0. Этот факт имеет самое непосредственное отношение к регулярности задач классификации.

Действительно, если рассмотреть ход решения некоторой задачи классификации, у которой универсальные ограничения выражены категорией Ψ_0 и матрица информации есть $\widehat{I}_0$, то при использовании модели алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$ и семейств корректирующих операций $\mathfrak{F}$ и решающих правил $\mathfrak{M}^1$ придется последовательно анализировать подмножества пространств $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{R})$ и $\mathfrak{C}_{q,l}(\widetilde{\mathfrak{I}})$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}^0(\widehat{I}_0) &= \{\, B(\widehat{I}_0) \mid B \in \mathfrak{M}^0 \,\}, && (3.3.9)\\
\mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0)(\widehat{I}_0) &= \{\, F(\widehat{R}_1,\ldots,\widehat{R}_p) \mid F \in \mathfrak{F},\ (\widehat{R}_1,\ldots,\widehat{R}_p) \in (\mathfrak{M}^0(\widehat{I}_0))^p \,\}, && (3.3.10)\\
\mathfrak{F}[\mathfrak{M}^1\circ\mathfrak{M}^0](\widehat{I}_0) &= \{\, C(\widehat{R}_1,\ldots,\widehat{R}_p) \mid C \in \mathfrak{M}^1,\ (\widehat{R}_1,\ldots,\widehat{R}_p) \in (\mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0)(\widehat{I}_0))^p \,\}. && (3.3.11)
\end{aligned}$$

Таким образом, при анализе регулярности задачи приходится рассматривать множества матриц $\{\widehat{I}_0\}$, $\mathfrak{M}^0(\widehat{I}_0)$, $\mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0(\widehat{I}_0))$ и $\mathfrak{M}^1(\mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0(\widehat{I}_0)))$, причем регулярность зависит от существования семейств $\mathfrak{M}^0$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}^1$, при которых множество $\mathfrak{M}^1(\mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0(\widehat{I}_0)))$ совпадает с $\mathfrak{C}_{q,l}(\widetilde{\mathfrak{I}})$. Из леммы 3.3.1 вытекает, что для этого необходимо, чтобы все указанные множества матриц были базами категории Ψ_0.

В то же время из приведенного после доказательства леммы примера вытекает вывод о том, что даже требуя от задачи, чтобы одноэлементное множество $\{\widehat{I}_0\}$ ($\widehat{I}_0$ — матрица информации) было базой категории Ψ_0, вообще говоря, нельзя на основе леммы 3.3.1 гарантировать, что множество $\{\widehat{I}_0\}$ с помощью морфизмов категории Ψ_0 может быть отображено в произвольный наперед заданный элемент пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\widetilde{\mathfrak{I}})$. На самом деле, однако, усиление леммы 3.3.1, не верное для произвольных баз полных допустимых категорий, оказывается справедливым для баз одноэлементных, а это именно то, что и требуется для задач классификации, поскольку в них исходное множество $\{\widehat{I}_0\}$ одноэлементно.

Лемма 3.3.2. Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{W}$ — произвольные неодноэлементные множества и X — одноэлементное подмножество пространства матриц $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$. Для выполнения любого из равенств (3.3.3) или (3.3.4) необходимо и достаточно, чтобы множество X было базой категории Ψ_0 в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$.

Доказательство. Необходимость доказана в лемме 3.3.1. Докажем достаточность.

Пусть $X = \{\widehat{U}_0\}$ — база категории Ψ_0 в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$. Из леммы 3.2.1 вытекает, что в этом случае X является и базой категории Ψ_0 в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ для $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})$, т.е. что для каждой матрицы $\widehat{W_0}$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})$ при некотором морфизме u категории Ψ_0 из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})$ выполнено равенство

$$\widehat{W_0} = u(\widehat{U}_0, \ldots, \widehat{U}_0). \tag{3.3.12}$$

Отсюда вытекает, что

$$\widehat{W_0} = u_\Delta(\widehat{U}_0), \tag{3.3.13}$$

где u_Δ — диагонализация морфизма u, являющаяся морфизмом категории Ψ_0 в силу ее допустимости.

Поскольку равенство (3.3.13) получено в предположении о произвольности матрицы $\widehat{W_0}$, то выполнено равенство

$$\mathrm{H}(\mathfrak{U}, \mathfrak{W})(X) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W}). \tag{3.3.14}$$

Отсюда и из предположения о полноте Ψ_0 имеем

$$\mathcal{H}(\mathfrak{W}, \mathfrak{W})(\mathrm{H}(\mathfrak{U}, \mathfrak{W})(X)) = \mathcal{H}(\mathfrak{W}, \mathfrak{W})(\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W}) \tag{3.3.15}$$

и, наконец,

$$\mathcal{H}(\mathfrak{W}, \mathfrak{V})\Big(\mathcal{H}(\mathfrak{W}, \mathfrak{W})(\mathrm{H}(\mathfrak{U}, \mathfrak{W})(X))\Big) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V}). \tag{3.3.16}$$

Равенство (3.3.5) для допустимой категории Ψ_0 вытекает из равенства (3.3.6).

Лемма доказана.

Теорема 3.3.3. (Общий критерий регулярности задач классификации). Для того, чтобы задача классификации Z с матрицей информации $\widehat{I}$ и системой универсальных ограничений, выраженной полной допустимой категорией Ψ_0, была регулярна, необходимо и достаточно, чтобы одноэлементное множество $\{\widehat{I}\}$ было базой категории Ψ_0 в пространстве матриц информации $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I})$.

Доказательство. По определению задача Z регулярна, если разрешимы все задачи, имеющие общую с Z матрицу информации $\widehat{I}$ и общую с Z систему универсальных ограничений. Разрешимость задачи Z описывается соотношением

$$\mathrm{H}(\mathfrak{I},\widetilde{\mathfrak{I}}) \cap \{A|A:\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I}) \to \mathfrak{C}_{q,l}(\widetilde{\mathfrak{I}}), A(\widehat{I}) = \widehat{I}\} \neq \varnothing, \tag{3.3.17}$$

которое эквивалентно включению

$$\widehat{\widehat{I}} \in \mathrm{H}(\mathfrak{I},\widetilde{\mathfrak{I}})(\widehat{I}). \tag{3.3.18}$$

Заставляя $\widehat{\widehat{I}}$ пробегать пространство информационных матриц $\mathfrak{C}_{q,l}(\widetilde{\mathfrak{I}})$, из (3.3.18) получаем условие регулярности

$$\mathrm{H}(\mathfrak{I},\widetilde{\mathfrak{I}})(\widehat{I}) = \mathfrak{C}_{q,l}(\widetilde{\mathfrak{I}}), \tag{3.3.19}$$

которое в силу леммы 3.3.2 приводит к утверждению теоремы.

Теорема доказана.

Отметим, что для использования общего критерия регулярности необходимо, конечно, иметь описание одноэлементных баз соответствующих категорий. Для категорий, выражающих обычно встречающиеся в практике решения задач классификации универсальные ограничения, такие описания будут получены в следующей главе. При этом оказывается, что некоторые частные случаи совпадают с условиями регулярности, вводившимися в ранее выполненных работах (см., например, [54–57]).

3.4 О полноте семейств морфизмов полных допустимых категорий

В предыдущем параграфе было проведено рассмотрение баз полных допустимых категорий и установлено, что регулярными являются те и только те задачи классификации, у которых множество, содержащее матрицу информации, оказывается базой категории, выражающей универсальные ограничения. Однако результаты, полученные при рассмотрении схемы (3.3.2), не могут непосредственно использоваться при анализе семейств отображений, применяемых для решения конкретных задач. Действительно, на практике встречаются не «целые» множества морфизмов типа $\mathrm{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{V})$ или $\mathcal{H}(\mathfrak{W},\mathfrak{W})$, но явным образом определенные параметрические подмножества таких множеств — модели алгоритмических операторов и семейства корректирующих операций и решающих правил.

Целью настоящего параграфа является рассмотрение проблем, возникающих при использовании в схемах типа (3.3.2) вместо «целых» множеств морфизмов их (собственных) подмножеств.

Итак, будет рассматриваться схема

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}) & \xrightarrow{\mathfrak{M}} & \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V}) \\
\Big\downarrow \mathfrak{M}^0 & & \Big\uparrow \mathfrak{M}^1 \\
\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W}) & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})
\end{array} \tag{3.4.1}$$

где $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{W}$ — произвольные неодноэлементные множества, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^0$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}^1$ — подмножества множеств морфизмов некоторой полной допустимой категории Ψ_0 (подкатегории категории $\Psi_{q,l}$), т.е.

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &\subseteq \mathrm{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{V}), &(3.4.2)\\ \mathfrak{M}^0 &\subseteq \mathrm{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{W}), &(3.4.3)\\ \mathfrak{F} &\subseteq \mathcal{H}(\mathfrak{W},\mathfrak{W}), &(3.4.4)\\ \mathfrak{M}^1 &\subseteq \mathcal{H}(\mathfrak{W},\mathfrak{V}). &(3.4.5)\end{aligned}$$

Рассмотрим множество $\mathfrak{M}$. По лемме 3.3.2 для выполнения равенства $\mathrm{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{V})(X) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$, где X — одноэлементное подмножество пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$, необходимо и достаточно, чтобы X было базой категории Ψ_0 в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$. Поскольку для любой задачи классификации Z с матрицей информации $\widehat{I}$ множество $X = \{\widehat{I}\}$ одноэлементно, то в качестве основного требования, предъявляемого к семейству $\mathfrak{M}$, естественно рассматривать требование 1-Г-полноты в смысле следующего определения:

Определение 3.4.1. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество, состоящее из морфизмов полной допустимой категории Ψ_0 из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$, где $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — неодноэлементные множества. Множество $\mathfrak{M}$ называется 1-Г-*полным в категории* Ψ_0, или просто 1-Г-полным, если для каждой одноэлементной базы X категории Ψ_0 в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ выполнено равенство

$$\mathfrak{M}(X) = \{A(\widehat{U}) | A \in \mathfrak{M}, \widehat{U} \in X\} = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V}).$$

Легко видеть, что если некоторое семейство отображений $\mathfrak{M}$ (при $\mathfrak{M} \subseteq \mathrm{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{V})$) не является 1-Г-полным в категории Ψ_0, то само применение такого семейства оказывается ограничением. Действительно, в этом случае по крайней мере для одной матрицы $\widehat{U}_0$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ будет выполнено равенство $\mathrm{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{V})(\widehat{U}_0) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$, но $\mathfrak{M}(\widehat{U}_0)$ окажется собственным подмножеством пространства матриц $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$.

На содержательном уровне регулярные задачи классификации могут быть охарактеризованы как «правильно поставленные». Так что в рассматриваемой ситуации (т.е. когда модель алгоритмов $\mathfrak{M}$ не 1-Г-полна) по меньшей мере одна «правильно поставленная» задача Z (с матрицей информации $\widehat{U}_0$) окажется не полной относительно модели $\mathfrak{M}$. Отсюда также вытекает, что и некоторая разрешимая задача не будет иметь решения в рамках $\mathfrak{M}$ (достаточно в качестве матрицы информации взять $\widehat{U}_0$ и в качестве информационной матрицы — матрицу из дополнения $\mathfrak{M}(\widehat{U}_0)$ до $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$).

С другой стороны, если семейство $\mathfrak{M}$ оказывается обладающим свойством 1-Г-полноты, то для любой матрицы $\widehat{U}$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ такой, что $\mathrm{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{V})(\widehat{U}) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$, будет выполнено и равенство $\mathfrak{M}(\widehat{U}) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$, т.е. в таком случае все «правильно поставленные» задачи будут полны относительно семейства $\mathfrak{M}$ и, следовательно, разрешимы в его рамках. Таким образом, семейство $\mathfrak{M}$ оказывается с позиции достижимости полноты и разрешимости «правильно поставленных» задач эквивалентным «целому» множеству $\mathrm{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{V})$, а потому и принципиально неулучшаемым в классе всех подмножеств этого множества.

Итак, при наличии универсальных ограничений для моделей алгоритмов оказывается однозначно определенным требование экстремального качества — требование 1-Г-полноты.

Перейдем теперь к рассмотрению множеств $\mathfrak{M}^0$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}^1$. Из сказанного выше и из того, что модель $\mathfrak{M}$ формируется в виде семейства суперпозиций $\mathfrak{F}[\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0]$ вытекает, что критерии для $\mathfrak{M}^0$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}^1$ должны быть обусловлены требованием 1-Г-полноты для $\mathfrak{F}[\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0]$.

Для последнего семейства свойство 1-Г-полноты может быть обеспечено, вообще говоря, различными способами. Можно, скажем, потребовать, чтобы уже семейство $\mathfrak{M}^0$ было 1-Г-полным. Тогда для любой одноэлементной базы X категории Ψ_0 в пространстве $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ будет выполнено равенство

$$\mathfrak{M}^0(X) = \{\, B(\widehat{U}) \mid B \in \mathfrak{M}^0,\ \widehat{U} \in X \,\} = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W}),$$

и для того, чтобы гарантировать 1-Г-полноту семейства суперпозиций $\mathfrak{F}[\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0]$, достаточно будет потребовать, чтобы в $\mathfrak{F}$ имелось тождественное унарное отображение пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})$ на себя и чтобы было выполнено равенство $\mathfrak{M}^1(\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$.

Чтобы остановиться на наиболее адекватной системе требований к множествам $\mathfrak{M}^0$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}^1$, учтем, что множества $\mathfrak{M}^0$ и $\mathfrak{M}^1$ составляют исходную эвристическую модель алгоритмов, расширение которой проводится путем применения корректирующих операций из множества $\mathfrak{F}$. При этом область определения отображений из $\mathfrak{M}^0$ (пространство возможных начальных информаций) и область значений (пространство возможных финальных информаций) — множества, как правило, в том или ином смысле «неудобные». В то же время $\mathfrak{F}$ — множество операций, определенных на пространстве возможных оценок, выбранном именно из соображений удобства.

Вышеприведенные соображения порождают вывод: требования, предъявляемые к $\mathfrak{M}^0$ и $\mathfrak{M}^1$, должны быть по возможности минимальными, а от семейства корректирующих операций $\mathfrak{F}$ можно требовать и выполнения более жестких условий. В соответствии с этим нашей первой целью будет установление необходимых и достаточных условий, обеспечивающих возможность построения на базе множеств $\mathfrak{M}^0$ и $\mathfrak{M}^1$ модели алгоритмов (суперпозиций) $\mathfrak{F}[\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0]$, являющейся 1-Г-полным семейством.

Определение 3.4.2. Пусть $\mathfrak{M}^0$ — множество, состоящее из морфизмов полной допустимой категории Ψ_0 из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})$, где $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{W}$ — неодноэлементные множества. Множество $\mathfrak{M}^0$ называется *слабо* 1-Г-*полным в категории* Ψ_0 или просто слабо 1-Г-полным, если для каждой одноэлементной базы X категории Ψ_0 в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ множество $\mathfrak{M}^0(X)$ является базой категории Ψ_0 в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})$.

Лемма 3.4.1. Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{W}$ — неодноэлементные множества, Ψ_0 — полная допустимая категория и $\mathfrak{M}^0$ — множество отображений, удовлетворяющее включениюЁ(3.4.3). Для того, чтобы существовали семейства отображений $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}^1$, удовлетворяющие включениям (3.4.4) и (3.4.5) соответственно, и такие, что имеет место 1-Г-полнота семейства суперпозиций $\mathfrak{F}[\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0]$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{M}^0$ было слабо 1-Г-полным в категории Ψ_0 семейством.

Доказательство. Очевидно, что доказательство достаточно провести для случая, когда $\mathfrak{F} = \mathcal{H}(\mathfrak{W}, \mathfrak{W})$ и $\mathfrak{M}^1 = \mathcal{H}(\mathfrak{W}, \mathfrak{V})$. В силу леммы 3.3.1 для выполнения равенства

$$\mathcal{H}(\mathfrak{W}, \mathfrak{V})(\mathcal{H}(\mathfrak{W}, \mathfrak{W})(Y)) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V}),$$

где Y — подмножество пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})$, необходимо и достаточно, чтобы множество Y было базой категории Ψ_0 в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})$. Полагая $Y = \mathfrak{M}^0(X)$, получаем, что для 1-Г-полноты семейства $\mathfrak{F}[\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0]$ необходимо и достаточно, чтобы для любой одноэлементной базы X категории Ψ_0 в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ множество $\mathfrak{M}^0(X)$ было базой категории Ψ_0 в пространстве матриц $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})$.

Лемма доказана.

Определение 3.4.3. Пусть $\mathfrak{M}^1 \subseteq \mathcal{H}(\mathfrak{W}, \mathfrak{V})$. Множество $\mathfrak{M}^1$ называется *корректным в категории* Ψ_0, если выполнено равенство $\mathfrak{M}^1(\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$.

Замечание. Для корректности множества $\mathfrak{M}^1$ достаточно, чтобы в нем содержалось хотя бы одно сюръективное отображение $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})$ на $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$.

Лемма 3.4.2. Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{W}$ — неодноэлементные множества, Ψ_0 — полная допустимая категория и $\mathfrak{M}^1$ — множество отображений, удовлетворяющее включению (3.4.5). Для того, чтобы существовали семейства отображений $\mathfrak{M}^0$ и $\mathfrak{F}$, удовлетворяющие включениям (3.4.3) и (3.4.4) соответственно, и такие, что имеет место 1-Г-полнота семейства суперпозиций $\mathfrak{F}[\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0]$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{M}^1$ было корректным в категории Ψ_0 семейством отображений.

Доказательство. Необходимость очевидна. Достаточность вытекает из того, что для любой одноэлементной базы X категории Ψ_0 в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ выполнено равенство $\mathrm{H}(\mathfrak{U}, \mathfrak{W})(X) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})$ и, далее, равенство $\mathcal{H}(\mathfrak{W}, \mathfrak{W})(\mathrm{H}(\mathfrak{U}, \mathfrak{W})(X)) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})$, так что семейства $\mathfrak{M}^0$ и $\mathfrak{F}$, обеспечивающие 1-Г-полноту для $\mathfrak{F}[\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0]$ действительно существуют: можно положить $\mathfrak{M}^0 = \mathrm{H}(\mathfrak{U}, \mathfrak{W})$ и $\mathfrak{F} = \mathcal{H}(\mathfrak{W}, \mathfrak{W})$.

Лемма доказана.

Итак, получены условия, необходимые для того, чтобы на базе семейств $\mathfrak{M}^0$ и $\mathfrak{M}^1$ можно было с помощью подходящего семейства $\mathfrak{F}$ построить семейство суперпозиций $\mathfrak{F}[\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0]$, обладающее свойством 1-Г-полноты в категории Ψ_0. Условия слабой 1-Г-полноты для $\mathfrak{M}^0$ и корректности для $\mathfrak{M}^1$ оказываются, на самом деле, и достаточными:

Лемма 3.4.3. Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{W}$ — неодноэлементные множества, Ψ_0 — полная допустимая категория и $\mathfrak{M}^0$ и $\mathfrak{M}^1$ — множества отображений, удовлетворяющие включениям (3.4.3) и (3.4.5) соответственно. Для того, чтобы существовало семейство отображений $\mathfrak{F}$, удовлетворяющее включению (3.4.4), такое, что имеет место 1-Г-полнота семейства суперпозиий $\mathfrak{F}[\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0]$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{M}^0$ было слабо 1-Г-полным в категории Ψ_0 семейством и $\mathfrak{M}^1$ было корректным в категории Ψ_0.

Доказательство. Необходимость вытекает из лемм 3.4.1 и 3.4.2. Докажем достаточность.

Пусть X — одноэлементная база категории Ψ_0 в пространстве матриц $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$, $\mathfrak{M}^0$ — слабо 1-Г-полное и $\mathfrak{M}^1$ — корректное в категории Ψ_0 семейства. В таком случае множество матриц $\mathfrak{M}^0(X)$ оказывается базой категории Ψ_0 в пространстве $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})$ (определение 3.4.2).

Поскольку категория Ψ_0 — полная и $\mathfrak{M}^0(X)$ — ее база, то выполнено равенство $\mathcal{H}(\mathfrak{W},\mathfrak{W})(\mathfrak{M}^0(X)) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})$. Полагая $\mathfrak{F} = \mathcal{H}(\mathfrak{W},\mathfrak{W})$, имеем $\mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0(X)) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})$.

Из корректности множества $\mathfrak{M}^1$ (определение 3.4.3) теперь вытекает, что также имеет место следующее равенство

$$\mathfrak{M}^1(\mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0(X))) = \mathfrak{M}^1(\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V}).$$

Таким образом, для любой одноэлементной базы X категории Ψ_0 в пространстве $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ выполнено равенство $\mathfrak{F}[\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0](X) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$, т.е. семейство $\mathfrak{F}[\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0]$ действительно является в данном случае 1-Г-полным в категории Ψ_0 (определение 3.4.1).

Лемма доказана.

Из проведенного рассмотрения легко заключить, что семейство $\mathfrak{F}$ гарантированно «получает на вход» базу категории Ψ_0 в пространстве!$\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})$, а «на выходе» должно при этом порождать все пространство $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})$. Дадим соответствующее определение:

Определение 3.4.4. Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{H}(\mathfrak{W},\mathfrak{W})$. Множество $\mathfrak{F}$ называется Г-*полным в категории* Ψ_0, если для любой базы Y категории Ψ_0 в пространстве $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})$ выполнено равенство

$$\mathfrak{F}(Y) = \{\, F(\widehat{W}_1,\ldots,\widehat{W}_p) \mid F \in \mathfrak{F},\ (\widehat{W}_1,\ldots,\widehat{W}_p) \in Y^p \,\} = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W}).$$

Все вышесказанное суммируется следующим утверждением:

Лемма 3.4.4. Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{W}$ — неодноэлементные множества, Ψ_0 — полная допустимая категория и $\mathfrak{M}^0, \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}^1$ — множества отображений, удовлетворяющие включениям (3.4.3), (3.4.4) и (3.4.5) соответственно. Для того, чтобы имела место 1-Г-полнота семейства суперпозиий $\mathfrak{F}[\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0]$, необходимо, чтобы $\mathfrak{M}^0$ было слабо 1-Г-полным в категории Ψ_0 семейством и $\mathfrak{M}^1$ было корректным в категории Ψ_0. При выполнении этого необходимого условия, для полноты семейства суперпозиций $\mathfrak{F}[\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0]$ достаточно, чтобы семейство $\mathfrak{F}$ было Г-полным в категории Ψ_0.

Доказательство этой леммы сводится к ссылкам на предыдущие леммы данного параграфа.

Отметим, что требование Г-полноты семейства $\mathfrak{F}$ не является, вообще говоря, необходимым. Действительно, если, скажем, $\mathfrak{M}^1 = \mathcal{H}(\mathfrak{W},\mathfrak{V})$, то для 1-Г-полноты семейства суперпозиций $\mathfrak{F}[\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0]$ окажется достаточным использовать слабо Г-полное семейство $\mathfrak{F}$, т.е. семейство, которое любую базу категории Ψ_0 в пространстве $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})$ снова переводит в базу (например, такое семейство может состоять из одного тождественного оператора). В то же время, исследуя по-отдельности семейства $\mathfrak{M}^0$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}^1$, нельзя ограничиваться по отношению к $\mathfrak{F}$ требованием более слабым, чем требование Г-полноты.

Как уже говорилось выше, при решении задач классификации использование в качестве модели алгоритмов 1-Г-полного подмножества соответствующего множества морфизмов категории, выражающей универсальные ограничения, позволяет обеспечить разрешимость в рамках такой модели всех регулярных задач. Таким образом для решения регулярных задач такие модели оказываются «не хуже», чем соответствующие «целые» множества морфизмов. Отсюда вытекает, что свойства слабой 1-Г-полноты моделей алгоритмических операторов, Г-полноты семейств корректирующих операций и корректности семейств решающих правил также являются абсолютно экстремальными в вышеуказанном смысле: они «не слабее» соответствующих «целых» множеств морфизмов, которые по самой своей сути являются чисто теоретическими объектами, в то время, как слабой 1-Г-полноты, Г-полноты и корректности в большинстве случаев можно добиться от достаточно просто устроенных параметрических семейств отображений.

Из всех рассмотренных в настоящем параграфе свойств полноты самым сильным является свойство Г-полноты. При исследовании конкретных семейств отображений в качестве достаточного условия бывает удобно использовать еще одно понятие полноты:

Определение 3.4.5. Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — произвольные множества, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ — множества отображений из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{V}$, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$. Множество $\mathfrak{F}$ называется сильно Г-полным в $\mathfrak{G}$, если для любого элемента U из $\mathfrak{U}$ и для любого отображения G из $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{F}$ содержится отображение F такое, что $F(U) = G(U)$.

Замечание. Сопоставим каждому отображению F из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{V}$ его график $\Gamma(F)$, являющийся подмножеством декартова произведения $\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}$. Условие сильной Г-полноты $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{G}$ при этом может быть выражено равенством

$$\bigcup_{F \in \mathfrak{F}} \Gamma(F) = \bigcup_{G \in \mathfrak{G}} \Gamma(G).$$

Рассматривая в качестве $\mathfrak{G}$ соответствующие множества морфизмов полных допустимых категорий, можно получить и соответствующие определения понятий сильной Г-полноты.

Аналогичным образом можно рассматривать и вопрос о соотношении множеств морфизмов разных категорий. До сих пор мы считали, что предметом изучения является произвольная фиксированная единственная подкатегория категории $\Psi_{q,l}$. Но различные подкатегории категории $\Psi_{q,l}$ могут быть одновременно и подкатегориями одна другой, т.е. множества морфизмов одной из таких категорий могут быть (собственными) подмножествами множеств морфизмов другой. Именно такая ситуация и станет предметом ближайшего обсуждения.

Итак, пусть Ψ_1 и Ψ_2 — полные допустимые категории, являющиеся подкатегориями категории $\Psi_{q,l}$, причем Ψ_1 — подкатегория категории Ψ_2. Вопрос, который в таком случае возникает в контексте анализа проблемы разрешимости задач классификации, можно поставить следующим образом: какими свойствами по отношению к Ψ_2 должна обладать категория Ψ_1 для того, чтобы любую задачу классификации, универсальные ограничения в которой выражены категорией Ψ_2, можно было решить в рамках категории Ψ_1?

Практическое значение поставленного вопроса обусловлено тем, что категория Ψ_2 может оказаться описанной таким образом, что параметрическое задание в общем виде ее морфизмов будет затруднено. В то же время, категория Ψ_2 может иметь подкатегорию Ψ_1, для которой такая проблема имеет достаточно очевидное решение. Более того, может оказаться, что для категории Ψ_1 имеются готовые программные средства, так что речь в таком случае пойдет о расширении области их применения с гарантированным результатом.

Из проведенного в настоящем параграфе рассмотрения нетрудно заключить, что искомое свойство подкатегорий выражается следующим определением:

Определение 3.4.6. Подкатегория Ψ_1 категории Ψ_2, где Ψ_1 и Ψ_2 — полные допустимые подкатегории категории $\Psi_{q,l}$, называется 1-Г-*полной в* Ψ_2, если всякая одноэлементная база категории Ψ_2 является одновременно и базой категории Ψ_1.

Отметим, что категория Ψ_1 является 1-Г-полной подкатегорией категории Ψ_2 тогда и только тогда, когда при любых неодноэлементных множествах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ семейство морфизмов $\mathrm{Hom}_{\Psi_1}(\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V}))$ оказывается 1-Г-полным в категории Ψ_2 семейством отображений.

Поскольку применение морфизмов одной категории для решения задач, в которых универсальные ограничения выражены другой категорией, возможно не только на уровне «целых» алгоритмов, но и на уровне отдельных семейств отображений, используемых для их синтеза, то полезным и важным оказывается и следующее понятие:

Определение 3.4.7. Подкатегория Ψ_1 категории Ψ_2, где Ψ_1 и Ψ_2 — полные допустимые подкатегории категории $\Psi_{q,l}$, называется Г-*полной в* Ψ_2, если всякая база категории Ψ_2 является одновременно и базой категории Ψ_1.

Итак, в настоящем параграфе были введены основные понятия, нужные для исследования категорий или, точнее, множеств отображений, являющихся морфизмами категорий, выражающих универсальные ограничения для задач классификации. Из вышесказанного вытекает, что основные проблемы при исследовании конкретных категорий, используемых в качестве универсальных ограничений, сводятся к описанию баз и к получению конкретных условий 1-Г-полноты, слабой 1-Г-полноты и т.д.

3.5 Полные модели алгоритмов и алгоритмических операторов и полные семейства корректирующих операций

В предыдущем параграфе были рассмотрены общие свойства семейств отображений — морфизмов полных допустимых категорий, причем использование этих семейств для решения задач классификации было по сути дела лишь поводом для соответствующих определений. Ввиду принципиальной важности для приложений результатов, относящихся непосредственно к моделям алгоритмов и алгоритмических операторов и к семействам корректирующих операций (а не просто к абстрактным семействам отображений), в настоящем параграфе будут сформулированы соответствующие критерии.

Пусть $\mathfrak{Z}$ — семейство задач классификации размера $q \times l$ с пространствами допустимых начальных информаций $\mathfrak{I}$ и финальных информаций $\widetilde{\mathfrak{I}}$, и пусть зафиксирована полная допустимая категория Ψ_0 (подкатегория категории $\Psi_{q,l}$), выражающая некоторую систему универсальных ограничений для задач из семейства $\mathfrak{Z}$. В этом случае определено множество регулярных задач $\mathfrak{Z}_{[R]}$, т.е. подмножество семейства $\mathfrak{Z}$, состоящее из задач, полнота которых достижима при использовании отображений — морфизмов категории Ψ_0.

Рассматривая как основную цель решение регулярных задач, естественно к моделям алгоритмов предъявлять требование полноты:

Определение 3.5.1. Модель алгоритмов $\mathfrak{M}$ категории Ψ_0 называется полной, если любая регулярная задача Z из множества $\mathfrak{Z}_{[R\}}$ полна относительно $\mathfrak{M}$, т.е. если для любой регулярной задачи Z выполнено равенство $\mathfrak{M}(\widehat{I}) = \mathfrak{C}_{q,l}(\widetilde{\mathfrak{I}})$, где $\widehat{I}$ — матрица информации этой задачи.

Отметим, что в силу сохранения свойства регулярности при изменении информационной матрицы в определении 3.5.1 можно вместо полноты относительно модели $\mathfrak{M}$ говорить о разрешимости в ее рамках.

Построение полных моделей алгоритмов в виде расширений эвристических информационных моделей является основным приемом алгебраического подхода. В рамках полных моделей гарантированно разрешимы все регулярные задачи, так что их использование при решении таких задач заведомо не хуже, чем применение произвольных иных конструкций. Нашей следующей целью будет описание свойств моделей алгоритмических операторов и семейств корректирующих операций, обеспечивающих полноту образуемых на их основе моделей алгоритмов.

Рассмотрим модель алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$ с множеством допустимых оценок $\mathfrak{R}$, считая, что операторы из модели $\mathfrak{M}^0$ суть морфизмы категории Ψ_0 из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{R})$.

Определение 3.5.2. Модель алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$ называется *полной в категории* Ψ_0 или просто полной, если для любой регулярной задачи Z из $\mathfrak{Z}_{[R]}$ существуют такие множества $\mathfrak{F}$ корректирующих операций и $\mathfrak{M}^1$ решающих правил, являющихся морфизмами категории Ψ_0, что задача Z оказывается $\mathfrak{F}$ -полной относительно семейства суперпозиций $\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0$ или, что то же, — полной относительно семейства $\mathfrak{F}[\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0]$.

Отметим, как и выше, что в определении 3.5.2 также можно вместо полноты относительно семейства $\mathfrak{F}[\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0]$ говорить о разрешимости в его рамках.

Легко видеть, что требование полноты для моделей алгоритмических операторов является «минимальным». Действительно, если окажется, что некоторая модель $\mathfrak{M}^0$ категории Ψ_0 не полна, то это будет означать, что существует регулярная задача Z (с содержательной точки зрения — корректно поставленная задача) такая, что для нее полноты нельзя будет добиться при использовании любых семейств корректирующих операций и решающих правил, удовлетворяющих универсальным ограничениям. Более того, в данной ситуации для некоторой регулярной задачи нельзя будет обеспечить и разрешимость, используя $\mathfrak{M}^0$ в качестве модели алгоритмических операторов. Итак, можно сказать, что операторы неполной модели $\mathfrak{M}^0$ «существенно неадекватно» производят перекодирование данных, входящих в матрицы информации. Отсюда вытекает, что применение неполных моделей алгоритмических операторов может привести и, более того, в некоторых случаях — обязательно приводит к невосполнимым на дальнейших этапах решения потерям информации. В то же время, если модель $\mathfrak{M}^0$ полна, то можно утверждать, что при перекодировании алгоритмическими операторами из $\mathfrak{M}^0$ сохраняется вся существенная информация, так что в этом смысле модель $\mathfrak{M}^0$ оказывается принципиально неулучшаемой в классе подмножеств множества морфизмов категории Ψ_0 из пространства матриц информации $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I})$ в пространство информационных матриц $\mathfrak{C}_{q,l}(\widetilde{\mathfrak{I}})$.

Определение 3.5.2 выражает основное требование, которое должно предъявляться к моделям алгоритмических операторов — требование полноты. Из сказанного в предыдущем параграфе вытекает, что от моделей алгоритмических операторов требуется также, чтобы они были слабо 1-Г-полными семействами отображений. Эти требования эквивалентны:

Теорема 3.5.1. Модель алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$ категории Ψ_0 полна в этой категории тогда и только тогда, когда семейство отображений $\mathfrak{M}^0$ является слабо 1-Г-полным в категории Ψ_0.

Доказательство. Напомним, что семейство $\mathfrak{M}^0$ является слабо 1-Г-полным в категории Ψ_0, если для любой одноэлементной базы $X = \{\widehat{I}\}$ категории Ψ_0 в пространстве матриц информации $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I})$ множество матриц $\mathfrak{M}^0(\widehat{I})$ оказывается базой категории Ψ_0 в пространстве матриц оценок $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{R})$.

Пусть задача Z с матрицей информации $\widehat{I}$ регулярна. В силу теоремы 3.3.3 это предположение эквивалентно тому, что множество $\{\widehat{I}\}$ является базой категории Ψ_0, и доказательство сводится к ссылке на лемму 3.4.1.

Теорема доказана.

Критерий теоремы 3.5.1 оказывается при развиваемом подходе основным инструментом анализа конкретных параметрических моделей алгоритмических операторов (при наличии, конечно, описаний баз категорий, выражающих универсальные ограничения). Опишем общую схему такого исследования.

Пусть рассматривается некоторый класс задач классификации $\mathfrak{Z}$ и некоторая модель алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$. Отметим сразу, что универсальные ограничения при этом могут быть в явном виде заранее не заданы. Поэтому прежде всего должен быть точно решен вопрос о том, какая именно категория выражает в данном случае систему универсальных ограничений. Ответ на этот вопрос обычно получить легко, просто анализируя вид отображений, выступающих в роли алгоритмических операторов.

При рассмотрении практических задач или семейств задач, система универсальных ограничений является выражением реальной информации. Формализация этой информации и есть по сути дела описание соответствующей категории. В такой ситуации приходится решать вопрос следующего типа: являются ли алгоритмические операторы из модели $\mathfrak{M}^0$ морфизмами этой категории? Ответ на этот вопрос в частных случаях сводится обычно к достаточно очевидной проверке.

В любой ситуации для анализа модели алгоритмических операторов должна быть определена полная допустимая категория Ψ_0 (подкатегория категории $\Psi_{q,l}$), морфизмами которой являются операторы из этой модели. Для категории Ψ_0 должны быть описаны базы, в том числе — одноэлементные. В рамках категории Ψ_0 и ведется весь последующий анализ.

Исследование полноты модели алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$ на базе теоремы 3.5.1 проводится следующим образом. Делается допущение, что Z — некоторая регулярная задача из $\mathfrak{Z}$ с матрицей информации $\widehat{I}$, т.е. предполагается, что одноэлементное множество $\{\widehat{I}\}$ является базой категории Ψ_0. После этого проверяется, является ли множество матриц оценок $\mathfrak{M}^0(\widehat{I})$ базой категории Ψ_0 в пространстве $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{R})$. Если $\mathfrak{M}^0(\widehat{I})$ — база, то делается вывод о полноте модели $\mathfrak{M}^0$, если же множество $\mathfrak{M}^0(\widehat{I})$ может не оказаться базой при некоторой базе $\{\widehat{I}\}$, то это означает, что модель не полна.

Перейдем теперь к рассмотрению семейств корректирующих операций. Как и выше, будем считать, что $\mathfrak{Z}$ — класс задач с пространством допустимых начальных информаций $\mathfrak{I}$ и финальных информаций $\widetilde{\mathfrak{I}}$. Будем также считать, что зафиксирована полная допустимая категория Ψ_0, выражающая систему универсальных ограничений, и полная модель алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$ этой категории с пространством допустимых оценок $\mathfrak{R}$. Наконец, предположим, что $\mathfrak{M}^1$ — корректное семейство решающих правил категории Ψ_0. В силу полученных выше результатов в этом и только в этом случае (т.е. когда модель $\mathfrak{M}^0$ полна и семейство $\mathfrak{M}^1$ корректно) для любой регулярной задачи Z из $\mathfrak{Z}$ существует такое семейство корректирующих операций $\mathfrak{F}$ категории Ψ_0, что задача Z оказывается $\mathfrak{F}$-полной относительно семейства суперпозиций $\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0$. Эти соображения приводят к нижеследующему определению.

Определение 3.5.3. Семейство корректирующих операций $\mathfrak{F}$ категории Ψ_0 называется *полным*, если при любой полной модели алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$ и при любом корректном семействе решающих правил $\mathfrak{M}^1$ семейство суперпозиций $\mathfrak{F}[\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0]$ является полной моделью алгоритмов.

Теорема 3.5.2. Семейство корректирующих операций $\mathfrak{F}$ категории Ψ_0 полно в этой категории, если семейство отображений $\mathfrak{F}$ является Г-полным в категории Ψ_0.

Доказательство. Данное утверждение непосредственно вытекает из леммы 3.4.4.

Критерий теоремы 3.5.2 оказывается при развиваемом подходе основным инструментом анализа конкретных семейств корректирующих операций (при наличии описаний баз категорий, выражающих универсальные ограничения). Опишем общую схему исследования.

Прежде всего, конечно, производится проверка того, что операции из рассматриваемого множества $\mathfrak{F}$ являются морфизмами категории Ψ_0, выражающей универсальные ограничения. Делается допущение, что X — подмножество пространства матриц оценок, являющееся базой категории Ψ_0. Далее исследуется вопрос о выполнении равенства $\mathfrak{F}(X) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{R})$, и если это равенство выполнено, то делается вывод о полноте семейства $\mathfrak{F}$. Рассматривая вопрос о свойствах семейств корректирующих операций, можно ради полноты изложения отметить, что полнота является в определенном смысле «максимальным» требованием, заведомо достаточным для решения с помощью соответствующего семейства всех регулярных задач. Нетрудно заметить также, что в качестве «минимального» требования для семейств корректирующих операций можно использовать свойство слабой Г-полноты, т.е. требование, чтобы образом базы в пространстве оценок также была база.

Это требование, однако, не находит практического применения, поскольку в таком случае приходится накладывать слишком жесткие условия на семейства решающих правил, что противоречит исходной идее алгебраического подхода о «переносе центра тяжести задач» на пространство оценок.

Существенный интерес представляют «промежуточные» ситуации, когда модель алгоритмических операторов оказывается достаточно богатой для того, чтобы гарантировать для всех регулярных задач построение не просто некоторой базы в пространстве матриц оценок, но базы, удовлетворяющей некоторым дополнительным условиям. В таких случаях построение полной модели алгоритмов может оказаться возможным и при использовании не обладающих свойством полноты семейств корректирующих операций. Важный пример такого рода будет рассмотрен в последней главе работы.

Проведенные в настощей главе построения, несмотря на их внешнюю простоту, образуют основу теории универсальных ограничений для задач классификации. Технически более сложные конструкции последующих глав оказываются, таким образом, лишь развитием и детализацией изложенных здесь основных идей.

Глава 4

Симметрические и функциональные универсальные ограничения для задач классификации

4.1 Однородность и независимость элементов начальной информации

Класс полных допустимых категорий (подкатегорий категорий $\Psi_{q,l}$) содержит в себе категории, соответствующие всем в принципе возможным универсальным ограничениям для задач классификации. Условия, определяющие эти категории, — это самые общие ограничения, без выполнения которых рассмотрение проблемы полноты (разрешимости) в значительной степени теряет смысл.

В то же время, именно в силу общности определения полных допустимых категорий, их изучение не может быть проведено с достаточной степенью подробности. Это обстоятельство заставляет ставить вопрос о выделении в семействе полных допустимых категорий подсемейств, с одной стороны, — достаточно узких (допускающих детальное исследование), и, с другой стороны, — достаточно обширных, чтобы получаемые при их изучении результаты могли быть использованы для применяемых или встречающихся на практике систем универсальных ограничений. В качестве таких подсемейств в настоящей главе и будут рассматриваться определяемые ниже семейства симметрических и функциональных категорий или, что по сути дела то же самое — симметрических и функциональных универсальных ограничений.

Симметрические универсальные ограничения возникают в реальных задачах как выражение информации о различного рода однородности различных объектов и классов или, точнее говоря, однородности данных об объектах и классах. Под однородностью здесь понимается инвариантность принимаемых решений по отношению к порядку рассмотрения объектов и/или классов. Например, считается, что информация об однородности всех объектов, подлежащих классификации, выражается требованием, чтобы при произвольной перестановке строк в матрице информации соответственно переставлялись бы и строки в информационной матрице, порождаемой искомым алгоритмом. Иначе говоря, требование однородности объектов трактуется здесь как условие независимости результата классификации от порядка предъявления объектов.

В реальности, конечно, могут встретиться и часто встречаются и существенно более сложные ситуации. Так, может быть известно, что первый объект в рассматриваемой выборке по отношению к первому классу ведет себя также, как второй — ко второму классу и т.д. Все случаи такого рода описываются системами симметрических универсальных ограничений, выражаемыми симметрическими категориями. Эти категории будут точно определены в следующем параграфе.

Помимо информации об однородности различных объектов и классов, в реальных задачах часто встречается информация о независимости данных, относящихся к различным парам вида «объект–класс». Эта информация может быть сформулирована, например, следующим образом: факт принадлежности i-го объекта j-му классу не зависит от данных о i_1-м объекте и j_1-м классе, i_2-м объекте и j_2-м классе и т.д.

Учитывая, что совокупность данных, относящихся к i-му объекту и j-му классу при нашем подходе рассматривается как элемент I_{ij} матрицы информации задачи, получаем, что информация о независимости может быть выражена требованием, чтобы корректный алгоритм мог быть задан функциями с соответствующими информации о независимости наборами аргументов, которыми являются элементы матрицы информации (значения таких функций — элементы информационной матрицы).

Пусть, например, известно, что объекты в рассматриваемой выборке взаимно независимы, т.е. что принадлежность любого объекта к любому классу не зависит от данных о любом ином объекте по отношению ко всем классам. В этом случае корректный алгоритм должен определяться функциями, наборами аргументов которых являются строки матрицы информации. Подобным же образом можно формализовать информацию о независимости различных классов: в этом случае алгоритм должен задаваться функциями от столбцов матрицы информации.

Наконец, часто встречается ситуация, когда имеется информация об одновременной однородности и независимости элементов задачи. Пусть, скажем, известно, что все объекты и классы в конкретной задаче однородны и взаимно попарно независимы. Из предположения о независимости немедленно вытекает, что корректный алгоритм должен определяться набором функций $f_{11}, \ldots, f_{ql}$, где $f_{ij} : \mathfrak{I} \to \widetilde{\mathfrak{I}}$ при $i \in \{1, \ldots, q\}$ и $j \in \{1, \ldots, l\}$, следующим образом: $A(\|I_{ij}\|_{q\times l}) = \|f_{ij}(I_{ij})\|_{q\times l}$. Из предположения же об однородности следует, что $f_{11} = f_{12} = \ldots = f_{ql}$. Таким образом, корректный алгоритм должен допускать задание с помощью единственной функции f из $\mathfrak{I}$ в $\widetilde{\mathfrak{I}}$, т.е. для любой матрицы $\widehat{I} = \|I_{ij}\|_{q\times l}$ из пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I})$ должно быть выполнено равенство $A(\widehat{I}) = \|f(I_{ij})\|_{q\times l}$.

Общий случай наличия информации об однородности и независимости может быть описан заданием соответствующих «областей зависимости» для каждого элемента информационных матриц и «областей однородности», т.е. подмножеств однородных элементов. При такой формализации выясняется, что требования независимости и однородности могут оказываться внутренне пртиворечивыми, так что только некоторые удовлетворяющие определенным условиям совокупности таких требований действительно определяют универсальные ограничения для задач классификации. Эти универсальные ограничения названы функциональными, как и соответствующие им подкатегории категорий $\Psi_{q,l}$. Рассмотрение функциональных категорий будет проведено в параграфах 4.3 и 4.4.

В последних параграфах настоящей главы будет рассмотрен вопрос о соотношении функциональных и симметрических универсальных ограничений. При этом будут установлены условия, обеспечивающие возможность решения задач, в которых имеются симметрические универсальные ограничения, с помощью моделей алгоритмов, являющихся морфизмами соответствующих функциональных категорий (такие модели, как правило, формировать проще, чем семейства морфизмов симметрических категорий).

4.2 Симметрические универсальные ограничения и категории. Определение. Полнота и допустимость. Базы

Символом σ_0 будет обозначаться симметрическая группа подстановок, действующих на множестве $\mathbb{S} = \{(1,1),\dots,(q,l)\}$, т.е. группа всех взаимно однозначных отображений $\mathbb{S}$ на себя. Символ σ, возможно — с индексами, будет использоваться для обозначения подгрупп группы σ_0.

Пусть $\mathfrak{U}$ — произвольное множество, $\widehat{U}$ — произвольная матрица из пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ и s — подстановка множества $\mathbb{S}$, т.е. подстановка из группы σ_0. Определим действие подстановки s на матрице $\widehat{U}$ равенством

$$s(\widehat{U}) = s(\|U_{ij}\|_{q\times l}) = \|U'_{ij}\|_{q\times l}, \tag{4.2.1}$$

где $U'_{ij} = U_{s(i,j)}$ при $i \in \{1,\dots,q\}$ и $j \in \{1,\dots,l\}$. Таким образом, действие подстановки заключается в перестановке элементов матрицы. Равенство (4.2.1) в силу произвольности матрицы $\widehat{U}$ определяет действие подстановок из группы σ_0 на пространстве матриц $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$.

Определим также действие подстановки s на пространстве наборов матриц $\mathfrak{C}^p_{q,l}(\mathfrak{U})$, где p — произвольное натуральное число:

$$s(\widehat{U}^1,\dots,\widehat{U}^p) = (s(\widehat{U}^1),\dots,s(\widehat{U}^p)) \tag{4.2.2}$$

(здесь $(\widehat{U}^1,\dots,\widehat{U}^p)$ — произвольный набор матриц из пространства $\mathfrak{C}^p_{q,l}(\mathfrak{U})$).

Пусть теперь σ — некоторая подгруппа группы σ_0. Сопоставим ей подкатегорию Σ категории $\Psi_{q,l}$, полагая $\operatorname{Ob}\Sigma = \operatorname{Ob}\Psi_{q,l}$ и определяя для произвольных множеств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ и натуральных чисел p_1 и p_2 множество морфизмов $\operatorname{Hom}_\Sigma(\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U}),\mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V}))$ как множество всех отображений из $\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V})$, коммутирующих со всеми подстановками из группы σ, т.е. таких отображений u, что при всех $s \in \sigma$ и $(\widehat{U}^1,\dots,\widehat{U}^{p_1})$ из $\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$ выполнено равенство

$$u(s(\widehat{U}^1,\dots,\widehat{U}^{p_1})) = s(u(\widehat{U}^1,\dots,\widehat{U}^{p_1})). \tag{4.2.3}$$

Категорию, сопоставляемую группе σ_α, где α — индекс, будем обозначать символом Σ_α.

Отметим, что множества всех отображений, коммутирующих со всеми подстановками из некоторой подгруппы группы σ_0, можно рассматривать как семейства морфизмов соответствующей подкатегории категории $\Psi_{q,l}$, поскольку тождественные отображения коммутируют со всеми подстановками из σ_0 и суперпозиции отображений, коммутирующих с некоторой подстановкой s, также с ней коммутируют.

Условие (4.2.3) позволяет, вообще говоря, сопоставить множества отображений не только подгруппам, но и просто произвольным подмножествам группы σ_0. Однако рассмотрение может быть ограничено только подгруппами, поскольку имеет место следующий факт:

Лемма 4.2.1. Пусть δ — подмножество группы σ_0, σ — подгруппа группы σ_0, для которой δ является множеством образующих. Тогда для произвольных множеств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ и натуральных чисел p_1 и p_2 выполнено равенство

$$\Delta(\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V})) = \mathrm{Hom}_\Sigma(\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V})), \tag{4.2.4}$$

где $\Delta(\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V}))$ — множество всех отображений из $\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V})$, коммутирующих со всеми подстановками из множества δ.

Доказательство. Каждая подстановка s из группы σ представима в виде $s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} \dots s_n^{\alpha_n}$, где $s_1, \dots, s_n$ — подходящие подстановки из δ и $\alpha_k \in \{-1, 1\}$ при всех k из множества $\{1, \dots, n\}$ (см. [22]). В силу этого для доказательства достаточно показать, что если s_1 и s_2 — произвольные подстановки из δ и u — отображение из множества $\Delta(\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V}))$, то отображение u коммутирует с s_1^{-1} и с $s_1 s_2$.

Итак, пусть $u \in \Delta(\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V}))$, $(\widehat{U}^1, \dots, \widehat{U}^{p_1})$ — произвольный набор матриц из $\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$ и s_1 и s_2 — подстановки из δ.

Очевидно, что

$$(\widehat{U}^1, \dots, \widehat{U}^{p_1}) = s_1(s_1^{-1}(\widehat{U}^1, \dots, \widehat{U}^{p_1})). \tag{4.2.5}$$

Поскольку отображение u коммутирует с подстановкой s_1, то из (4.2.5) вытекает

$$u(\widehat{U}^1, \dots, \widehat{U}^{p_1}) = s_1\left(u(s_1^{-1}(\widehat{U}^1, \dots, \widehat{U}^{p_1}))\right). \tag{4.2.6}$$

Применяя к обеим частям этого равенства подстановку s_1^{-1}, получаем

$$s_1^{-1}\left(u(\widehat{U}^1, \dots, \widehat{U}^{p_1})\right) = u\left(s_1^{-1}(\widehat{U}^1, \dots, \widehat{U}^{p_1})\right), \tag{4.2.7}$$

так что для отображения u и подстановки s_1^{-1} выполнено условие коммутации, что и требовалось.

Из предположения о том, что отображение u коммутирует с подстановками s_1 и s_2, получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} s_1 s_2(u(\widehat{U}^1, \dots, \widehat{U}^{p_1})) &= s_1(s_2(u(\widehat{U}^1, \dots, \widehat{U}^{p_1}))) = \\ = s_1(u(s_2(\widehat{U}^1, \dots, \widehat{U}^{p_1}))) &= u(s_1 s_2(\widehat{U}^1, \dots, \widehat{U}^{p_1})), \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

т.е. для подстановки $s_1 s_2$ условие (4.2.3) снова выполнено.

Лемма доказана.

Итак, каждому подмножеству δ симметрической группы σ_0 в каждом множестве морфизмов категории $\Psi_{q,l}$ условием (4.2.3) сопоставляется подмножество отображений, причем эти подмножества однозначно определяются подгруппой группы σ_0, для которой δ — множество образующих. Покажем теперь, что для любой подгруппы σ группы σ_0 категория Σ является допустимой.

Пусть u и v — морфизмы категории Σ из $\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V})$ и из $\mathfrak{C}^{r_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{r_2}_{q,l}(\mathfrak{V})$ соответственно, $(\widehat{U}^1, \dots, \widehat{U}^{p_1+r_1})$ — набор матриц из пространства $\mathfrak{C}^{p_1+r_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$, s — подстановка из группы σ. Тогда произведение $u \times v$ удовлетворяет цепочке равенств

$$\begin{aligned} &u \times v(s(\widehat{U}^1, \dots, \widehat{U}^{p_1+r_1})) = \Big(u(s(\widehat{U}^1, \dots, \widehat{U}^{p_1})), v(s(\widehat{U}^{p_1+1}, \dots, \widehat{U}^{p_1+r_1}))\Big) = \\ &= \Big(s(u(\widehat{U}^1, \dots, \widehat{U}^{p_1})), s(v(\widehat{U}^{p_1+1}, \dots, \widehat{U}^{p_1+r_1}))\Big) = s(u \times v(\widehat{U}^1, \dots, \widehat{U}^{p_1+r_1})), \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

т.е. коммутирует с подстановкой s и потому является морфизмом категории Σ.

Пусть теперь u — морфизм категории Σ из $\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V})$, $\widehat{U}$ — произвольная матрица из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$, s — подстановка из группы σ. Тогда для диагонализации u_Δ отображения u имеем

$$u_\Delta(s(\widehat{U})) = u(s(\widehat{U}), \dots, s(\widehat{U})) = u(s(\widehat{U}, \dots, \widehat{U})) = s(u_\Delta(\widehat{U})), \tag{4.2.10}$$

так что если отображение u коммутирует с s, то и u_Δ тоже коммутирует с s.

Итак, категория Σ допустима.

Лемма 4.2.2. Для любой подгруппы σ группы σ_0 категория Σ полна.

Доказательство. Пусть σ — подгруппа группы σ_0, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — произвольные множества, причем $|\mathfrak{U}| > 1$. Для доказательства леммы достаточно показать, что выполнено равенство

$$\bigcup_{p=0}^{\infty} \left\{ u(\widehat{U}^1, \dots, \widehat{U}^p) \,\middle|\, u \in \mathrm{Hom}_\Sigma(\mathfrak{C}^p_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})), \;\; (\widehat{U}^1, \dots, \widehat{U}^p) \in \mathfrak{C}^p_{q,l}(\mathfrak{U}) \right\} = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V}). \tag{4.2.11}$$

(см. определение 2.3.1).

В случае, когда группа σ состоит из единственной тождественной подстановки, выполнение равенства (4.2.11) очевидно, поскольку в этой ситуации при всех натуральных p выполнено равенство

$$\left\{ u(\widehat{U}^1, \dots, \widehat{U}^p) \,\middle|\, u \in \mathrm{Hom}_\Sigma(\mathfrak{C}^p_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})), \;\; (\widehat{U}^1, \dots, \widehat{U}^p) \in \mathfrak{C}^p_{q,l}(\mathfrak{U}) \right\} = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V}). \tag{4.2.12}$$

Пусть $s_1, \dots, s_p$ — все неединичные подстановки из группы σ. Сопоставим каждой подстановке s_k при $k \in \{1, \dots, p\}$ матрицу $\widehat{U}^k_0$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ такую, что $s_k(\widehat{U}^k_0) \neq \widehat{U}^k_0$. Это можно сделать в силу предположения о том, что в множестве $\mathfrak{U}$ имеются по меньшей мере два различных элемента. Действительно, т.к. подстановки s_k по предположению нетождественные, то для каждой из них существует элемент (i_0, j_0) множества $\mathbb{S}$ такой, что $s_k(i_0, j_0) = (i_1, j_1) \neq (i_0, j_0)$. В качестве матрицы $\widehat{U}^k_0$ в таком случае можно взять произвольную матрицу $\left\|U^k_{ij}\right\|_{q \times l}$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ с $U^k_{i_0 j_0} \neq U^k_{i_1 j_1}$.

Выберем теперь произвольный элемент V_0 множества $\mathfrak{V}$ и положим, что $\widehat{V}_0$ — матрица из пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$, все элементы которой равны V_0.

Определим теперь для каждой матрицы $\widehat{V}$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$ отображение $u_{\widehat{V}} : \mathfrak{C}^p_{q,l}(\mathfrak{U}) \to \to \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$ равенством

$$u_{\widehat{V}}(\widehat{U}^1, \ldots, \widehat{U}^p) = \begin{cases} s(\widehat{V}), & \text{если для некоторой подстановки } s \text{ из группы } \sigma \\ & \text{выполнено } (\widehat{U}^1, \ldots, \widehat{U}^p) = s(\widehat{U}^1_0, \ldots, \widehat{U}^p_0), \\ \widehat{V}_0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{4.2.13}$$

В силу определения набора матриц $(\widehat{U}^1_0, \ldots, \widehat{U}^p_0)$ отображения $u_{\widehat{V}}$ определены равенством (4.2.13) корректно. Действительно, корректность определения отображений $u_{\widehat{V}}$ означает, что ни в одной точке пространства $\mathfrak{C}^p_{q,l}(\mathfrak{U})$ значения не определены различными способами. Это очевидно для наборов матриц $(\widehat{U}^1, \ldots, \widehat{U}^p)$ из $\mathfrak{C}^p_{q,l}(\mathfrak{U})$ таких, что для всех s из σ выполнено условие $(\widehat{U}^1, \ldots, \widehat{U}^p) \neq (\widehat{U}^1_0, \ldots, \widehat{U}^p_0)$. Если же для некоторой подстановки s_0 из группы σ выполнено равенство $(\widehat{U}^1, \ldots, \widehat{U}^p) = s_0(\widehat{U}^1_0, \ldots, \widehat{U}^p_0)$, то для любой иной подстановки s из группы σ имеет место $(\widehat{U}^1, \ldots, \widehat{U}^p) \neq s(\widehat{U}^1_0, \ldots, \widehat{U}^p_0) = s(s_0^{-1}(\widehat{U}^1, \ldots, \widehat{U}^p))$, так что отображение $u_{\widehat{V}}$ определено в точке $(\widehat{U}^1, \ldots, \widehat{U}^p)$ равенством (4.2.13) единственным образом.

Покажем теперь, что отображения $u_{\widehat{V}}$ при всех $\widehat{V}$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$ являются морфизмами категории Σ, т.е. что эти отображения коммутируют со всеми подстановками s из группы σ.

Пусть s — произвольная подстановка из σ, $\widehat{V}$ — матрица из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$, $(\widehat{U}^1, \ldots, \widehat{U}^p)$ — элемент пространства наборов матриц $\mathfrak{C}^p_{q,l}(\mathfrak{U})$. Если для всех s из σ выполнено соотношение $(\widehat{U}^1, \ldots, \widehat{U}^p) \neq s(\widehat{U}^1_0, \ldots, \widehat{U}^p_0)$, то проверяемое равенство

$$s(u_{\widehat{V}}(\widehat{U}^1, \ldots, \widehat{U}^p)) = u_{\widehat{V}}(s(\widehat{U}^1, \ldots, \widehat{U}^p))$$

сводится к очевидному в силу выбора матрицы $\widehat{V}_0$ соотношению $s(\widehat{V}_0) = \widehat{V}_0$.

Если же $(\widehat{U}^1, \ldots, \widehat{U}^p) = s_0(\widehat{U}^1_0, \ldots, \widehat{U}^p_0)$ при некоторой подстановке s_0 из σ, то из определения (4.2.13) получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} s(u_{\widehat{V}}(\widehat{U}^1, \ldots, \widehat{U}^p)) = s(u_{\widehat{V}}(s_0(\widehat{U}^1_0, \ldots, \widehat{U}^p_0))) = s(s_0(\widehat{V})) = \\ = ss_0(\widehat{V}) = u_{\widehat{V}}(ss_0(\widehat{U}^1_0, \ldots, \widehat{U}^p_0)) = u_{\widehat{V}}(s(\widehat{U}^1, \ldots, \widehat{U}^p)). \end{aligned}$$

Итак, отображения $u_{\widehat{V}}$ действительно являются морфизмами категории Σ. Из определения (4.2.13) при $s = e$ (e — тождественная подстановка) получаем $u_{\widehat{V}}(\widehat{U}^1_0, \ldots, \widehat{U}^p_0) = \widehat{V}$, что влечет равенство

$$\bigcup_{\widehat{V} \in \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})} \{u_{\widehat{V}}(\widehat{U}^1_0, \ldots, \widehat{U}^p_0)\} = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$$

и, тем более, искомое равенство (4.2.11).

Лемма доказана.

Симметрические категории являются формальными описаниями систем симметрических универсальных ограничений для алгоритмов классификации. Как было установлено в предыдущей главе, для их использования при исследовании и решении задач необходимо иметь описания баз этих категорий в произвольных пространствах матриц. Получение таких описаний и станет нашей ближайшей целью.

Лемма 4.2.3. Пусть σ — подгруппа симметрической группы σ_0 и X — подмножество пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$, где $\mathfrak{U}$ — произвольное множество. Множество X является базой категории Σ в пространстве $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ тогда и только тогда, когда для любой нетождественной подстановки s из группы σ в множестве X найдется матрица $\widehat{U}$ такая, что для нее будет выполнено соотношение $s(\widehat{U}) \neq \widehat{U}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть X — такое подмножество пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$, что для некоторой нетождественной подстановки s_0 из группы σ и для всех матриц $\widehat{U}$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ выполнено равенство $s_0(\widehat{U}) = \widehat{U}$. Из соотношения (4.2.3), определяющего состав множеств $\mathrm{Hom}_\Sigma(\mathfrak{C}^p_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}))$ при произвольных натуральных p, для любого морфизма u категории Σ из $\mathfrak{C}^p_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ и для любого элемента $(\widehat{U}^1, \ldots, \widehat{U}^p)$ декартовой степени X^p в данном случае имеем цепочку равенств

$$s_0(u(\widehat{U}^1, \ldots, \widehat{U}^p)) = u(s_0(\widehat{U}^1, \ldots, \widehat{U}^p)) = u(s_0(\widehat{U}^1), \ldots, s_0(\widehat{U}^p)) = u(\widehat{U}^1, \ldots, \widehat{U}^p).$$

Отсюда вытекает, что

$$\bigcup_{p=0}^{\infty} \mathrm{Hom}_\Sigma\left(\mathfrak{C}^p_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})\right)(X) \subseteq \{\, \widehat{U} \mid \widehat{U} \in \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}),\ s_0(\widehat{U}) = \widehat{U} \,\} \subset \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}),$$

где последнее включение строгое, т.к. подстановка s_0 — нетождественная. Следовательно, множество X в данном случае не является базой категории Σ в пространстве $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$.

Достаточность. Пусть теперь X — такое подмножество пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$, что для любой нетождественной подстановки s из группы σ в X содержится матрица $\widehat{U}(s)$ такая, что $s(\widehat{U}(s)) \neq \widehat{U}(s)$. Пусть также U_0 — некоторый элемент множества $\mathfrak{U}$ и $\widehat{U}_0$ — матрица из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$, все элементы которой равны U_0.

Положим, что $\sigma = \{e, s_1, s_2, \ldots, s_p\}$, занумеровав тем самым все неединичные подстановки из группы σ.

Теперь для каждой матрицы $\widehat{U}$ из пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ определим отображение $u_{\widehat{U}}$ из пространства наборов матриц $\mathfrak{C}^p_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$:

$$u_{\widehat{U}}(\widehat{U}^1, \ldots, \widehat{U}^p) = \begin{cases} s(\widehat{U}), & \text{если для некоторой подстановки } s \text{ из группы } \sigma \\ & \text{выполнено } (\widehat{U}^1, \ldots, \widehat{U}^p) = s(\widehat{U}(s_1), \ldots, \widehat{U}(s_p)), \\ \widehat{U}_0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{4.2.14}$$

В силу определения набора матриц $(\widehat{U}(s_1), \ldots, \widehat{U}(s_p))$ отображения $u_{\widehat{U}}$ определены равенством (4.2.14) корректно, что проверяется как в доказательстве леммы 4.2.2. Так же проверяется и то, что отображения $u_{\widehat{U}}$ являются морфизмами категории Σ.

Из определения (4.2.14) следует, что

$$u_{\widehat{U}}(\widehat{U}(s_1), \ldots, \widehat{U}(s_p)) = \widehat{U}.$$

Отсюда вытекает равенство

$$\{\, u_{\widehat{U}}(\widehat{U}(s_1), \dots, \widehat{U}(s_p)) \mid \widehat{U} \in \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}),\ (\widehat{U}(s_1), \dots, \widehat{U}(s_p)) \in X^p \,\} = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$$

и, далее,

$$\{\, u(\widehat{U}^1, \dots, \widehat{U}^p) \mid u \in \mathrm{Hom}_\Sigma(\mathfrak{C}^p_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})),\ (\widehat{U}^1, \dots, \widehat{U}^p) \in X^p \,\} = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$$

и

$$\bigcup_{p=0}^{\infty} \mathrm{Hom}_\Sigma(\mathfrak{C}^p_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}))(X) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}),$$

т.е. множество X в этом случае действительно является базой категории Σ в пространстве $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$.

Лемма доказана.

Следствие 4.2.4. Пусть σ — подгруппа группы σ_0 и $\widehat{U}_0$ — матрица из пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$, где $\mathfrak{U}$ — произвольное неодноэлементное множество. Множество $\{\widehat{U}_0\}$ является одноэлементной базой категории Σ тогда и только тогда, когда при любой нетождественной подстановке s из σ выполнено соотношение $s(\widehat{U}_0) \neq \widehat{U}_0$.

4.3 Функциональные универсальные ограничения и категории. Определение. Примеры

Как уже говорилось выше, функциональные универсальные ограничения являются выражением содержательной информации об одновременной однородности и независимости объектов и/или классов в конкретных задачах. Целью настоящего параграфа будет определение подкатегорий категорий $\Psi_{q,l}$, формализующих эти универсальные ограничения.

Для произвольных множеств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ и натуральных чисел p_1 и p_2 любое отображение u из $\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V})$ (любой морфизм категории $\Psi_{q,l}$) взаимно однозначно соответствует набору из $p_2 ql$ функций f^r_{ij} ($i \in \{1, \dots, q\}$, $j \in \{1, \dots, l\}$, $r \in \{1, \dots, p_2\}$) из $\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{V}$:

$$u(\widehat{U}^1, \dots, \widehat{U}^{p_1}) = \left(\left\| f^1_{ij}(\widehat{U}^1, \dots, \widehat{U}^{p_1}) \right\|_{q\times l}, \dots, \left\| f^{p_2}_{ij}(\widehat{U}^1, \dots, \widehat{U}^{p_1}) \right\|_{q\times l} \right). \tag{4.3.1}$$

Функциональные подкатегории категории $\Psi_{q,l}$ возникают при рассмотрении в качестве морфизмов только отображений, допускающих представление, аналогичное (4.3.1), с помощью, вообще говоря, меньшего, чем $p_2 ql$, числа функций меньшего числа аргументов.

В параграфе 4.1 рассматривался пример системы универсальных ограничений, в котором все пары «объект—класс» считались однородными и независимыми. Для произвольных множеств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ и натуральных чисел p_1 и p_2 семейство морфизмов соответствующей категории определяется как множество отображений u из $\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V})$ таких, что для некоторого набора функций $f^1, \dots, f^{p_2}$ из $\mathfrak{U}^{p_1}$ в $\mathfrak{V}$ (своего для каждого отображения) и для любого набора матриц $(\widehat{U}^1, \ldots, \widehat{U}^{p_1}) = (\left\|U^1_{ij}\right\|_{q\times l}, \ldots, \left\|U^{p_1}_{ij}\right\|_{q\times l})$ из пространства $\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$ выполнено равенство

$$u(\widehat{U}^1, \ldots, \widehat{U}^{p_1}) = \left(\left\|f^1(U^1_{ij}, \ldots, U^{p_1}_{ij})\right\|_{q\times l}, \ldots, \left\|f^{p_2}(U^1_{ij}, \ldots, U^{p_1}_{ij})\right\|_{q\times l}\right).$$

Отметим, в частности, что операторы умножения действительных матриц на число, сложения и умножения их по Адамару являются морфизмами этой категории.

Перейдем теперь к точному общему определению функциональных категорий.

Определение 4.3.1. Функциональной сигнатурой φ называется совокупность $(\mathbb{S}_{(1,1)}, \ldots, \mathbb{S}_{(q,l)})$ линейно упорядоченных подмножеств множества $\mathbb{S} = \{(1,1), \ldots, (q,l)\}$ вместе с функцией λ из $\mathbb{S}$ в множество $\{1, \ldots, t\}$, где t — число, не превосходящее ql. При этом для любых (i_1, j_1) и (i_2, j_2) из $\mathbb{S}$ должно быть выполнено условие

$$(\lambda(i_1, j_1) = \lambda(i_2, j_2)) \to \left(|\mathbb{S}_{(i_1,j_1)}| = |\mathbb{S}_{(i_2,j_2)}|\right). \tag{4.3.2}$$

Функциональные сигнатуры будут записываться в виде

$$\varphi = (\mathbb{S}_{(1,1)}, \ldots, \mathbb{S}_{(q,l)}, \lambda). \tag{4.3.3}$$

Мощности множеств $\mathbb{S}_{(i,j)}$ будем обозначать символом $z(i,j)$, т.е. по определению положим $z(i,j) = |\mathbb{S}_{(i,j)}|$ при $i \in \{1, \ldots, q\}$ и $j \in \{1, \ldots, l\}$. С использованием этого обозначения условие (4.3.2) можно записать так:

$$(\lambda(i_1, j_1) = \lambda(i_2, j_2)) \to (z(i_1, j_1) = z(i_2, j_2)). \tag{4.3.4}$$

Содержательно наборы $\mathbb{S}_{(i,j)}$ представляют собой описания «областей зависимости» элементов информационных матриц, т.е. по сути дела — наборы аргументов, функциями от которых являются эти элементы. Морфизмы функциональных категорий, как уже говорилось, определяются соответствующими наборами функций. При этом, конечно, для каждого элемента информационной матрицы должна быть указана конкретная функция из набора, используемая для его вычисления. Именно эту роль выполняет входящая в определение функциональной сигнатуры функция λ: ее значение и есть номер функции для конкретного «места» в информационной матрице. Из сказанного следует, естественно, что если для различных «мест» используется одна функция, то соответствующие этим «местам» наборы аргументов должны иметь одинаковые количества членов, что и определяется входящим в определение условием (4.3.2).

Из равенства (4.3.4) вытекает, что для всех (i,j) из $\mathbb{S}$ величины $z(i,j)$ однозначно определяются функцией λ, так что можно при $k \in \{1, \ldots, t\}$ положить $z(k) = z(i_0, j_0)$, где (i_0, j_0) — произвольная пара из $\mathbb{S}$ такая, что для нее $k = \lambda(i_0, j_0)$.

Множества $\mathbb{S}_{(i,j)}$ будут записываться в виде упорядоченных наборов $(\xi(i,j,1), \xi(i,j,2), \ldots, \xi(i,j,z(i,j)))$, где элементы выписаны в соответствии с порядком, введенном на множестве $\mathbb{S}_{(i,j)}$.

Пусть $\varphi = (\mathbb{S}_{(1,1)}, \dots, \mathbb{S}_{(q,l)}, \lambda)$ — функциональная сигнатура, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — множества, p_1 и p_2 — натуральные числа. Задание сигнатуры φ позволяет из множества всех отображений из $\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V})$ выделить подмножество $\Phi(\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V}))$, состоящее из всех отображений u таких, что для некоторого набора функций $f^1_1, \dots, f^1_t, f^2_t, \dots, f^{p_2}_t$ (своего для каждого отображения из $\Phi(\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V})))$, где $f^k_r : \mathfrak{U}^{p_1 z(r)} \to \mathfrak{V}$, и для произвольного набора матриц $(\widehat{U}^1, \dots, \widehat{U}^{p_1})$ из $\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$ выполнено равенство

$$\begin{aligned} u(\widehat{U}^1, \dots, \widehat{U}^{p_1}) &= u\Big(\left\|U^1_{ij}\right\|_{q\times l}, \dots, \left\|U^{p_1}_{ij}\right\|_{q\times l} \Big) = \\ &= \Big(\left\| f^1_{\lambda(i,j)}(U^1_{\xi(i,j,1)}, \dots, U^1_{\xi(i,j,z(i,j))}, \dots, U^{p_1}_{\xi(i,j,z(i,j))}) \right\|_{q\times l}, \dots, \\ &\qquad \left\| f^{p_2}_{\lambda(i,j)}(U^1_{\xi(i,j,1)}, \dots, U^1_{\xi(i,j,z(i,j))}, \dots, U^{p_1}_{\xi(i,j,z(i,j))}) \right\|_{q\times l} \Big). \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Отображения, входящие для данной функциональной сигнатуры φ в множество $\Phi(\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V}))$, будем далее называть φ-отображениями.

Подмножества $\Phi(\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V}))$ множеств морфизмов $\mathrm{Hom}_{\Psi_{q,l}}(\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V}))$ категории $\Psi_{q,l}$ не всегда можно рассматривать как множества морфизмов соответствующей сигнатуре φ категории. Такая возможность существует лишь для сигнатур, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям.

Определение 4.3.2. Функциональная сигнатура φ, где $\varphi = (\mathbb{S}_{(1,1)}, \dots, \mathbb{S}_{(q,l)}, \lambda)$, называется *допустимой*, если для нее выполнены следующие условия:

$$(i,j) \in \mathbb{S}_{(i,j)} \tag{4.3.6}$$

— для всех $(i,j) \in \mathbb{S}$;

$$(\lambda(i_1,j_1) = \lambda(i_2,j_2))\,\&((i_1,j_1) = \xi(i_1,j_1,k)) \to ((i_2,j_2) = \xi(i_2,j_2,k)) \tag{4.3.7}$$

— для всех $(i_1,j_1), (i_2,j_2) \in \mathbb{S}$ и $k \in \{1, \dots, z(i_1,j_1)\}$;

$$(\lambda(i_1,j_1) = \lambda(i_2,j_2)) \to (\lambda(\xi(i_1,j_1,k)) = \lambda(\xi(i_2,j_2,k))) \tag{4.3.8}$$

— для всех $(i_1,j_1), (i_2,j_2) \in \mathbb{S}$ и $k \in \{1, \dots, z(i_1,j_1)\}$;

$$((i_1,j_1) \in \mathbb{S}_{(i_2,j_2)}) \to (\mathbb{S}_{(i_1,j_1)} \subseteq \mathbb{S}_{(i_2,j_2)}) \tag{4.3.9}$$

— для всех $(i_1,j_1), (i_2,j_2) \in \mathbb{S}$;

$$\begin{aligned} (\lambda(i_1,j_1) = \lambda(i_2,j_2)) \to (\ &(\xi(\xi(i_1,j_1,k),k_1) = \xi(i_1,j_1,k_2)) \equiv \\ &(\xi(\xi(i_2,j_2,k),k_1) = \xi(i_2,j_2,k_2))\ ) \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

— для всех $(i_1,j_1), (i_2,j_2) \in \mathbb{S},\ k, k_2 \in \{1, \dots, z(i_1,j_1)\}$
и $k_1 \in \{1, \dots, z(\xi(i_1,j_1,k))\}$ (при выполнении условий (4.3.8) и (4.3.9)).

Лемма 4.3.1. Функциональная сигнатура φ определяет подкатегорию категории $\Psi_{q,l}$ тогда и только тогда, когда φ — допустимая функциональная сигнатура.

Доказательство. Доказательство будет проводиться только для множеств отображений $\Phi(\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V}))$ при произвольных множествах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ и при $p_1 = p_2 = 1$, т.к. построения для случая произвольных натуральных p_1 и p_2 совершенно аналогичны приведенным ниже и отличаются от них по сути дела лишь более сложной записью.

Для того, чтобы множества φ-отображений можно было считать множествами морфизмов определяемой функциональной сигнатурой φ категории, необходимо и достаточно, чтобы тождественные отображения были φ-отображениями и чтобы суперпозиции φ-отображений также были φ-отображениями. Так что для доказательства леммы достаточно показать, что условия (4.3.6) — (4.3.10) необходимы и достаточны для того, чтобы тождественные отображения и суперпозиции φ-отображений были φ-отображениями.

Достаточность. Пусть функциональная сигнатура φ допустима, т.е. пусть для нее верны условия (4.3.6)–(4.3.10).

Напомним, что для φ (как и вообще для любой функциональной сигнатуры) определена функция $z : \{1, \ldots, t\} \to \{1, \ldots, ql\}$ такая, что для всех k из $\{1, \ldots, t\}$ и всех (i, j) из $\mathbb{S}$ из равенства $k = \lambda(i, j)$ вытекает, что $z(k) = z(i, j)$.

Конъюнкция условий (4.3.6) и (4.3.7) эквивалентна утверждению о существовании для сигнатуры φ функции α, определенной на множестве $\{1, \ldots, t\}$, такой, что при всех (i, j) из $\mathbb{S}$ выполнено равенство $(i, j) = \xi(i, j, \alpha(\lambda(i, j)))$. Действительно, пусть (i_1, j_1) и (i_2, j_2) таковы, что для них $\lambda(i_1, j_1) = \lambda(i_2, j_2)$. Из условия (4.3.6) вытекает, что при некотором k_0 истинна левая часть импликации (4.3.7). Это k_0 и является значением функции α в точке $\lambda(i_1, j_1)$, причем из (4.3.7) вытекает корректность этого определения (единственность k_0).

Условию (4.3.8) эквивалентно утверждение о существовании для сигнатуры φ функции $\beta(k_1, k_2)$, где $k_1 \in \{1, \ldots\ldots, t\}$ и $k_2 \in \{1, \ldots, z(k_1)\}$ такой, что для всех (i, j) из $\mathbb{S}$ и всех k из $\{1, \ldots, z(i, j)\}$ выполнено равенство $\lambda(\xi(i, j, k)) = \beta(\lambda(i, j), k)$.

Наконец, при выполнении условия (4.3.8), условиям (4.3.9) и (4.3.10) эквивалентно утверждение о существовании для сигнатуры φ функции $\gamma(k_1, k_2, k_3)$, где $k_1 \in \{1, \ldots\ldots, t\}$, $k_2 \in \{1, \ldots, z(k_1)\}$ и $k_3 \in \{1, \ldots, z(\beta(k_1, k_2))\}$, такой, что для всех $(i, j) \in \mathbb{S}$, всех $k_1 \in$ $\in \{1, \ldots, z(i, j)\}$ и всех $k_2 \in \{1, \ldots, z(\xi(i, j, k_1))\}$ выполнено равенство $\xi(\xi(i, j, k_1), k_2) =$ $= \xi(i, j, \gamma(\lambda(i, j), k_1, k_2))$.

Итак, выполнение для допустимой функциональной сигнатуры φ условий (4.3.6)–(4.3.10) влечет существование для этой сигнатуры функций α, β и γ.

Рассмотрим суперпозицию произвольных φ-отображений u и v, где $u : \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}) \to$ $\to \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$ и $v : \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V}) \to \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})$. Пусть при этом отображение u определяется набором функций $f_1, \ldots, f_t$, а v — набором $g_1, \ldots, g_t$.

Допустим теперь, что $\widehat{U} = \|U_{ij}\|_{q\times l}$ — некоторая матрица из пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ и что $u(\widehat{U}) = \widehat{V} = \|V_{ij}\|_{q\times l}$ и $v(u(\widehat{U})) = v(\widehat{V}) = \widehat{W} = \|W_{ij}\|_{q\times l}$. Для всех (i, j) из $\mathbb{S}$ из определения φ-отображений (равенство (4.3.5)) получаем

$$V_{ij} = f_{\lambda(i,j)}\left(U_{\xi(i,j,1)}, \ldots, U_{\xi(i,j,z(i,j))}\right) \qquad (4.3.11)$$

и

$$W_{ij} = g_{\lambda(i,j)}\left(V_{\xi(i,j,1)}, \ldots, V_{\xi(i,j,z(i,j))}\right), \qquad (4.3.12)$$

так что

$$W_{ij} = g_{\lambda(i,j)}\Big(f_{\lambda(\xi(i,j,1))}\left(U_{\xi(\xi(i,j,1),1)}, \ldots, U_{\xi(\xi(i,j,1),z(\xi(i,j,1)))}\right), \ldots, \\ f_{\lambda(\xi(i,j,z(i,j)))}\left(U_{\xi(\xi(i,j,z(i,j)),1)}, \ldots, U_{\xi(\xi(i,j,z(i,j)),z(\xi(i,j,z(i,j))))}\right)\Big). \tag{4.3.13}$$

Полагая $k = \lambda(i,j)$ и используя функции β и γ, последнее равенство можно записать в виде

$$W_{ij} = g_k\Big(f_{\beta(k,1)}\left(U_{\xi(i,j,\gamma(k,1,1))}, \ldots, U_{\xi(i,j,\gamma(k,1,z(\beta(k,1))))}\right), \ldots, \\ f_{\beta(k,z(k))}\left(U_{\xi(i,j,\gamma(k,z(k),1))}, \ldots, U_{\xi(i,j,\gamma(k,z(k),z(\beta(k,z(k)))))}\right)\Big). \tag{4.3.14}$$

Определим теперь φ-отображение w из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$ набором функций $h_1, \ldots, h_t$, задаваемых для любого $k \in \{1, \ldots, t\}$ и любого $U = (U, \ldots, U_{z(k})$ из $\mathfrak{U}^{z(k)}$ равенством

$$h_k(U) = g_k\Big(f_{\beta(k,1)}\left(U_{\gamma(k,1,1)}, \ldots, U_{\gamma(k,1,z(\beta(k,1)))}\right), \ldots, \\ f_{\beta(k,z(k))}\left(U_{\gamma(k,z(k),1)}, \ldots, U_{\gamma(k,z(k),z(\beta(k,z(k))))}\right)\Big). \tag{4.3.15}$$

Из равенств (4.3.14) и (4.3.15) вытекает, что

$$W_{ij} = h_{\lambda(i,j)}(U_{\xi(i,j,1)}, \ldots, U_{\xi(i,j,z(i,j))}). \tag{4.3.16}$$

Выполнение последнего равенства для произвольной пары индексов (i,j) из $\mathbb{S}$ и означает, что в данном случае (т.е. при условии существования функций β и γ) суперпозиция φ-отображений u и v сама оказывается φ-отображением.

Покажем теперь, что из существования для сигнатуры φ функции α, т.е. из выполнения условий (4.3.6) и (4.3.7) вытекает, что тождественное отображение $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ на себя при произвольном множестве $\mathfrak{U}$ является φ-отображением.

Действительно, определим φ-отображение u_0 набором функций $f_1^0, \ldots, f_t^0$, положив для любого k из $\{1, \ldots, t\}$ и любого набора $(U_1, \ldots, U_{z(k)})$ из $\mathfrak{U}^{z(k)}$

$$f_k^0(U_1, \ldots, U_{z(k)}) = U_{\alpha(k)}. \tag{4.3.17}$$

Из определения функции α вытекает, что для любой матрицы $\widehat{U} = \|U_{ij}\|_{q\times l}$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ при всех (i,j) из множества $\mathbb{S}$ будет иметь место равенство

$$f^0_{\lambda(i,j)}(U_{\xi(i,j,1)}, \ldots, U_{\xi(i,j,z(i,j))}) = U_{\xi(i,j,\alpha(\lambda(i,j)))} = U_{ij}, \tag{4.3.18}$$

откуда вытекает, что $u_0(\widehat{U}) = \widehat{U}$, что и требуется.

Необходимость. Докажем теперь, что если функциональная сигнатура φ не является допустимой, т.е. если она не удовлетворяет хотя бы одному из условий (4.3.6)–(4.3.10), то множества φ-отображений не могут рассматриваться как множества морфизмов подкатегории категории $\Psi_{q,l}$.

Необходимость условия (4.3.6). Пусть для функциональной сигнатуры φ не выполнено условие (4.3.6), $\mathfrak{U}$ — множество, в котором выделены два различных элемента U_1^0 и U_2^0.

В силу предположения, в множестве $\mathbb{S}$ имеется пара индексов (i_0, j_0) такая, что $(i_0, j_0) \notin \mathbb{S}_{(i_0,j_0)}$.

Пусть u — произвольное φ-отображение из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в себя, определяемое набором функций $f_1, \ldots, f_t$.

Рассмотрим $\widehat{U}^1 = \|U_{ij}^1\|_{q\times l}$ и $\widehat{U}^2 = \|U_{ij}^2\|_{q\times l}$ — матрицы из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ такие, что в $\widehat{U}^1$ все элементы равны U_1^0, а в $\widehat{U}^2$ — $U_{i_0 j_0}^2 = U_2^0$, а все остальные элементы снова равны U_1^0. Положим $\|U_{ij}^{1'}\|_{q\times l} = u(\widehat{U}^1)$ и $\|U_{ij}^{2'}\|_{q\times l} = u(\widehat{U}^2)$.

Из определяющего φ-отображения равенства (4.3.5) вытекает, что

$$U_{ij}^{1'} = f_{\lambda(i_0,j_0)}(U_1^0, \ldots, U_1^0)$$

и

$$U_{ij}^{2'} = f_{\lambda(i_0,j_0)}(U_1^0, \ldots, U_1^0),$$

так что $U_{ij}^{1'} = U_{ij}^{2'}$.

Поскольку $U_{ij}^{1'} = U_{ij}^{2'}$ и $U_1^0 \neq U_2^0$, то φ-отображение u не может быть тождественным. Так как это верно для любого φ-отображения, то это и означает, что в данном случае множество $\Phi(\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}))$ не может рассматриваться как множество морфизмов соответствующей категории.

Необходимость условия (4.3.6) доказана.

Необходимость условия (4.3.7). Пусть для функциональной сигнатуры φ не выполнено условие (4.3.7), $\mathfrak{U}$ — множество, в котором выделены два различных элемента U_1^0 и U_2^0.

Из сделанного предположения вытекает, что в множестве $\mathbb{S}$ имеются по меньшей мере две пары индексов (i_1, j_1) и (i_2, j_2) такие, что $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$, $\lambda(i_1, j_1) = \lambda(i_2, j_2)$, $(i_1, j_1) = \xi(i_1, j_1, k_1)$ и $(i_2, j_2) = \xi(i_2, j_2, k_2)$ при $k_1 \neq k_2$.

Положим $k_0 = \lambda(i_1, j_1) = \lambda(i_2, j_2)$ и рассмотрим φ-отображение u пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в себя, считая его тождественным. Пусть отображение u определяется набором функций $f_1, \ldots, f_t$.

Из того, что по предположению u — тождественное отображение, вытекает, что функция $f_{k_0} : \mathfrak{U}^{z(k_0)} \to \mathfrak{U}$ должна при произвольном наборе $(U_1, \ldots, U_{z(k_0)})$ из $\mathfrak{U}^{z(k_0)}$ удовлетворять равенствам

$$f_{k_0}(U_1, \ldots, U_{z(k_0)}) = U_{k_1} \tag{4.3.19}$$

и

$$f_{k_0}(U_1, \ldots, U_{z(k_0)}) = U_{k_2}. \tag{4.3.20}$$

Полагая $U_{k_1} = U_1^0$ и $U_k = U_2^0$ при $k \in \{1, \ldots, z(k_0)\}$ и $k \neq k_0$, получаем противоречие:

$$U_1^0 = f_{k_0}(U_2^0, U_2^0, \ldots, U_2^0, U_1^0, U_2^0, \ldots, U_2^0) = U_2^0.$$

Итак, и в случае, когда сигнатура φ не удовлетворяет условию (4.3.7), тождественное отображение $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ на себя оказывается не φ-отображением.

Необходимость условия (4.3.7) доказана.

Необходимость условия (4.3.8). Пусть для функциональной сигнатуры φ не выполнено условие (4.3.8), и снова $\mathfrak{U}$ — множество, в котором выделены два различных элемента U_1^0 и U_2^0.

Невыполнение условия (4.3.8) означает существование пар (i_1, j_1) и (i_2, j_2) в $\mathbb{S}$ и индекса k таких,что $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$, $\lambda(i_1, j_1) = \lambda(i_2, j_2) = k_1$ и $\lambda(\xi(i_1, j_1, k)) = k_2 \neq$ $\neq \lambda(\xi(i_2, j_2, k)) = k_3$, где $k \in \{1, \ldots, z(k_1)\}$.

Рассмотрим суперпозицию $v \circ u$ двух φ-отображений $u : \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}) \to \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ и $v : \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}) \to \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$, считая, что u определено набором функций $f_1, \ldots, f_t$, а v — набором $g_1, \ldots, g_t$, причем положим для произвольных наборов $(U_1, \ldots, U_{z(k_1)})$, $(U_1, \ldots, U_{z(k_2)})$ и $(U_1, \ldots, U_{z(k_3)})$:

$$\begin{aligned} g_{k_1}(U_1, \ldots, U_{z(k_1)}) &= U_k, \\ f_{k_2}(U_1, \ldots, U_{z(k_2)}) &= U_1^0, \\ f_{k_3}(U_1, \ldots, U_{z(k_3)}) &= U_2^0. \end{aligned}$$

Если бы суперпозиция $v \circ u$ была φ-отображением, то она должна была бы определяться набором функций $h_1, \ldots, h_t$ таким, что функция h_{k_1} оказывалась бы тождественно равной U_1^0 и U_2^0 одновременно, что невозможно в силу предположения о выполнении соотношения $U_1^0 \neq U_2^0$.

Итак, при невыполнении для функциональной сигнатуры φ условия (4.3.8), множество $\Phi(\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}))$ оказывается незамкнутым относительно суперпозиций и потому не может рассматриваться как множество морфзимов подкатегории категории $\Psi_{q,l}$.

Необходимость условия (4.3.8) доказана.

Необходимость условия (4.3.9). Пусть для функциональной сигнатуры φ не выполнено условие (4.3.9). Это означает, что в множестве $\mathbb{S}$ существуют пары индексов (i_1, j_1), (i_2, j_2) и (i_3, j_3) такие, что $(i_1, j_1) \in \mathbb{S}_{(i_2,j_2)}$, $(i_3, j_3) \in \mathbb{S}_{(i_1,j_1)}$, но $(i_3, j_3) \notin \mathbb{S}_{(i_2,j_2)}$. Положим $k_1 =$ $= \lambda(i_1, j_1)$ и $k_2 = \lambda(i_2, j_2)$.

Рассмотрим суперпозицию $v \circ u$ двух φ-отображений u и v ($u : \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}) \to \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ и $v : \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}) \to \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$), считая, что u определено набором функций $f_1, \ldots, f_t$ и v — набором $g_1, \ldots, g_t$, причем для произвольных наборов $(U_1, \ldots, U_{z(k_1)})$ и $(U_1, \ldots, U_{z(k_2)})$ выполнены равенства

$$f_{k_1}(U_1, \ldots, U_{z(k_1)}) = U_{k_3},$$

и

$$g_{k_2}(U_1, \ldots, U_{z(k_2)}) = U_{k_4},$$

где k_3 — индекс такой, что $(i_3, j_3) = \xi(i_1, j_1, k_3)$ и k_4 — такой, что $(i_1, j_1) = \xi(i_2, j_2, k_4)$.

Применяя отображение u к произвольной матрице $\widehat{U} = \|U_{ij}\|_{q \times l}$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$, получаем $\widehat{U}' = \left\|U'_{ij}\right\|_{q \times l}$, где $U'_{i_1 j_1} = U_{i_3 j_3}$.

Используя теперь отображение v, из $\widehat{U}'$ получаем матрицу $\widehat{U}'' = v(\widehat{U}') = \left\|U''_{ij}\right\|_{q \times}$, в которой $U''_{i_2 j_2} = U'_{i_1 j_1}$, так что $U''_{i_2 j_2} = U_{i_3 j_3}$.

Допуская, что суперпозиция $v \circ u$ является φ-отображением, определенным набором функций $h_1, \ldots, h_t$, для функции h_{k_2} и для произвольной матрицы $\widehat{U} = \|U_{ij}\|_{q \times l}$ имеем

$$h_{k_2}(U_{\xi(i_2,j_2,1)}, \ldots, U_{\xi(i_2,j_2,z(k_2))}) = U_{i_3 j_3}. \tag{4.3.21}$$

Рассмотрим матрицы $\widehat{U}^1 = \left\|U^1_{ij}\right\|_{q\times l}$ и $\widehat{U}^2 = \left\|U^2_{ij}\right\|_{q\times l}$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ такие, что в $\widehat{U}^1$ все элементы равны между собой и равны некоторому элементу U^0_1 множества $\mathfrak{U}$, а в $\widehat{U}^2$ — $U^2_{i_3 j_3} = U^0_2 \neq U^0_1$ и $U^2_{ij} = U^0_1$ при $(i,j) \in \mathbb{S}$ и $(i,j) \neq (i_3, j_3)$. Из равенства (4.3.21) для этого случая получаем следующие соотношения:

$$h_{k_2}(U^0_1, \ldots, U^0_1) = U^0_1$$

и

$$h_{k_2}(U^0_1, \ldots, U^0_1) = U^0_2,$$

т.е. противоречие, так что суперпозиция $v \circ u$ в этом случае не является φ-отображением.

Необходимость условия (4.3.9) доказана.

Необходимость условия (4.3.10). Пусть для функциональной сигнатуры φ выполнены условия (4.3.8) и (4.3.9), но не выполнено условие (4.3.10). Это означает, что существуют пары индексов (i_1, j_1) и (i_2, j_2) в $\mathbb{S}$ такие, что $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ и $\lambda(i_1, j_1) = \lambda(i_2, j_2)$, и существуют индексы k_2, k_3, k_4 и k_5 такие, что $\xi(\xi(i_1, j_1, k_2), k_3) = \xi(i_1, j_1, k_4)$, $\xi(\xi(i_2, j_2, k_2), k_3) = \xi(i_2, j_2, k_5)$ и $k_4 \neq k_5$.

В силу выполнения для сигнатуры φ условия (4.3.8), выполнено равенство

$$\lambda(\xi(i_1, j_1, k_2)) = \lambda(\xi(i_2, j_2, k_2)) = k_6.$$

Рассмотрим суперпозицию $v \circ u$ двух φ-отображений u и v, где $u : \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}) \to \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$, $v : \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}) \to \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$, считая, что u определено набором функций $f_1, \ldots, f_t$, а v — набором $g_1, \ldots, g_t$, причем так, что для любых наборов элементов множества $\mathfrak{U}$ выполнены равенства

$$h_{k_2}(U_1, \ldots, U_{z(k_6)}) = U_{k_3}$$

и

$$h_{k_1}(U_1, \ldots, U_{z(k_1)}) = U_{k_2}.$$

Если бы суперпозиция $v \circ u$ была φ-отображением, то функция h_{k_1} из соответствующего набора функций должна была бы при произвольном наборе $(U_1, \ldots, U_{z(k_1)})$ удовлетворять двум, вообще говоря, несовместным в силу соотношения $k_4 \neq k_5$ условиям:

$$h_{k_1}(U_1, \ldots, U_{z(k_1)}) = U_{k_4}$$

и

$$h_{k_1}(U_1, \ldots, U_{z(k_1)}) = U_{k_5}.$$

Итак, если при выполнении условий (4.3.8) и (4.3.9) не выполнено (4.3.10), то множество $\Phi(\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}))$, как и в предыдущих случаях, оказывается незамкнутым относительно суперпозиций.

Лемма доказана.

Теперь понятие допустимой функциональной сигнатуры будет проиллюстрировано рядом примеров, совокупность которых является одновременно доказательством независимости условий (4.3.6)–(4.3.10).

Примеры функциональных сигнатур.

Пример 4.3.1. Размер: $q = 2$ и $l = 1$.

Сигнатура: $\varphi_1 = (((1,1)), ((1,1)), \lambda)$.

Функция λ: $\lambda(1,1) = 1$, $\lambda(2,1) = 2$.

Функциональная сигнатура φ_1 удовлетворяет условиям допустимости (4.3.7)–(4.3.10), но для нее не выполнено условие 4.3.6. Действительно, $(2,1) \notin \mathbb{S}_{(2,1)} = ((1,1))$.

Пример 4.3.2. Размер: $q = 2$ и $l = 1$.

Сигнатура: $\varphi_2 = (((1,1),(2,1)), ((1,1),(2,1)), \lambda)$.

Функция λ: $\lambda(1,1) = \lambda(2,1) = 1$.

Функциональная сигнатура φ_2 удовлетворяет условиям допустимости (4.3.6) и (4.3.8)–(4.3.10), но для нее не выполнено условие (4.3.7). Действительно, хотя $(1,1) = \xi(1,1,1)$, но $(2,1) = \xi(2,1,2) \neq \xi(2,1,1) = (1,1)$.

Пример 4.3.3. Размер: $q = 4$ и $l = 1$.

Сигнатура: $\varphi_3 = (((1,1),(3,1)), ((2,1),(4,1)), ((3,1)), ((4,1)), \lambda)$.

Функция λ: $\lambda(1,1) = \lambda(2,1) = 1$, $\lambda(3,1) = 2$, $\lambda(4,1) = 3$.

Функциональная сигнатура φ_3 удовлетворяет условиям допустимости (4.3.6), (4.3.7), (4.3.9) и (4.3.10), но для нее не выполнено условие (4.3.8). Действительно, хотя $\lambda(1,1) = \lambda(2,1)$, но $\lambda(\xi(1,1,2)) = \lambda(3,1) = 2 \neq \lambda(\xi(2,1,2)) = \lambda(4,1) = 3$.

Пример 4.3.4. Размер: $q = 3$ и $l = 1$.

Сигнатура: $\varphi_4 = (((1,1),(2,1),(3,1)), ((1,1),(2,1)), ((3,1)), \lambda)$.

Функция λ: $\lambda(1,1) = 1$, $\lambda(2,1) = 2$, $\lambda(3,1) = 3$.

Функциональная сигнатура φ_4 удовлетворяет условиям допустимости (4.3.6)–(4.3.8) и (4.3.10), но для нее не выполнено условие (4.3.9). Действительно, хотя $(1,1) \in \mathbb{S}_{(2,1)}$, но не выполнено включение $\mathbb{S}_{(1,1)} \subseteq \mathbb{S}_{(2,1)}$.

Пример 4.3.5. Размер: $q = 6$ и $l = 1$.

Сигнатура:

$$\begin{aligned} \varphi_5 = (\quad & ((1,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)), \\ & ((2,1),(3,1),(5,1),(4,1),(6,1)), \\ & ((3,1),(4,1)), ((5,1),(6,1)), \\ & ((6,1),(5,1)), \lambda). \end{aligned}$$

Функция λ: $\lambda(1,1) = \lambda(2,1) = 1$ и $\lambda(3,1) = \lambda(4,1) = \lambda(5,1) = \lambda(6,1) = 2$.

Функциональная сигнатура φ_5 удовлетворяет условиям допустимости (4.3.6)–(4.3.9), но для нее не выполнено условие 4.3.10. Действительно, хотя $\lambda(1,1) = \lambda(2,1)$, но

$$\xi(\xi(1,1,2),2) = \xi(3,1,2) = (4,1) = \xi(1,1,3)$$

и

$$\xi(\xi(2,1,2),2) = \xi(3,1,2) = (4,1) = \xi(2,1,3).$$

Пример 4.3.6. Размер: $q = 2$ и $l = 1$.

Сигнатура: $\varphi_6 = (((1,1)), ((2,1)), \lambda)$.

Функция λ: $\lambda(1,1) = 1$, $\lambda(2,1) = 2$.

Пример 4.3.7. Размер: $q = 2$ и $l = 1$.

Сигнатура: $\varphi_7 = (((1,1),(2,1)),((2,1),(1,1)),\lambda)$.

Функция λ: $\lambda(1,1) = \lambda(2,1) = 1$.

Пример 4.3.8. Размер: $q = 4$ и $l = 1$.

Сигнатура: $\varphi_8 = (((1,1),(3,1)),((2,1),(4,1)),((3,1)),((4,1)),\lambda)$.

Функция λ: $\lambda(1,1) = \lambda(2,1) = 1$, $\lambda(3,1) = \lambda(4,1) = 2$.

Пример 4.3.9. Сигнатура φ_9 совпадает с φ_5, но $\mathbb{S}_{(2,1)} = ((2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1))$.

Функциональные сигнатуры φ_6–φ_9 — допустимые.

Из леммы 4.3.1 вытекает, что каждой допустимой функциональной сигнатуре φ соответствует подкатегория категории $\Psi_{q,l}$. Категория, определяемая сигнатурой φ_α, будет обозначаться символом Φ_α (с использованием, как и в случае симметрических категорий, общего индекса α).

4.4 Функциональные универсальные ограничения. Полнота и допустимость. Базы

Из равенства (4.3.5), определяющего состав множеств морфизмов функциональных категорий, непосредственно вытекает, что при любой функциональной сигнатуре φ произведение двух φ-отображений u и v, где $u : \mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U}) \to \mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V})$ и $v : \mathfrak{C}^{r_1}_{q,l}(\mathfrak{U}) \to \mathfrak{C}^{r_2}_{q,l}(\mathfrak{V})$, также является φ-отображением и что диагонализация любого φ-отображения — φ-отображение. Отсюда следует, что при любой допустимой функциональной сигнатуре φ категория Φ допустима.

Лемма 4.4.1. Для любой допустимой функциональной сигнатуры φ категория Φ полна.

Доказательство. Пусть $\varphi = (\mathbb{S}_{(1,1)}, \ldots, \mathbb{S}_{(q,l)}, \lambda)$ — допустимая функциональная сигнатура, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — произвольные множества, причем $|\mathfrak{U}| > 1$. Для доказательства леммы достаточно показать, что в этой ситуации выполнено равенство

$$\bigcup_{p=0}^{\infty}\Big\{u(\widehat{U}^1,\ldots,\widehat{U}^p)\;\Big|\;(\widehat{U}^1,\ldots,\widehat{U}^p) \in \mathfrak{C}^p_{q,l}(\mathfrak{U}), u \in \mathrm{Hom}_\Phi(\mathfrak{C}^p_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V}))\Big\} = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V}). \quad (4.4.1)$$

При $t = ql$, т.е. когда число функций, определяющих морфизмы, равно размерности задачи, справедливость равенства (4.4.1) очевидна, поскольку при этом оно выполнено уже при $p = 0$. Далее будет рассматриваться случай $t < ql$.

Пусть $((i^1_1, j^1_1), (i^2_1, j^2_1))$, …, $((i^1_\nu, j^1_\nu), (i^2_\nu, j^2_\nu))$ — все такие пары пар индексов из $\mathbb{S}$, что $(i^1_k, j^1_k) \neq (i^2_k, j^2_k)$ и $\lambda(i^1_k, j^1_k) = \lambda(i^2_k, j^2_k)$ при $k \in \{1, \ldots, \nu\}$, V_0 — произвольный фиксированный элемент множества $\mathfrak{V}$.

Для каждого $k \in \{1, \ldots, \nu\}$ построим матрицу $\widehat{U}^k = \left\|U^k_{ij}\right\|_{q\times l}$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ такую, что

$U^k_{i^1_k j^1_k} \neq U^k_{i^2_k j^2_k}$ (это можно сделать в силу предположения о неодноэлементности множества $\mathfrak{U}$).

Определим теперь для каждой матрицы $\widehat{V} = \|V_{ij}\|_{q\times l}$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$ соотвествующее ей φ-отображение $u_{\widehat{V}}$ из $\mathfrak{C}^{\nu}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$ функциями $f^k_{\widehat{V}}(k \in \{1,\dots,t\})$, такими, что при произвольном наборе $\bar{U} = (U_1,\dots,U_{\nu z(k)})$ из $\mathfrak{U}^{\nu z(k)}$

$$f^k_{\widehat{V}}(\widehat{U}) = \begin{cases} V_{ij} & \text{— если } \lambda(i,j) = k \text{ и } \bar{U} = (U^1_{\xi(i,j,1)},\dots,U^{\nu}_{\xi(i,j,z(k))}); \\ V_0 & \text{— в противном случае.} \end{cases} \tag{4.4.2}$$

В силу условия выбора набора матриц $\widehat{U}^1,\dots,\widehat{U}^{\nu}$ функции $f^k_{\widehat{V}}$ задаются равенством (4.4.2) корректно при всех $\widehat{V}$ и k. Действительно, рассмотрим произвольное k из множества $\{1,\dots,t\}$. Пусть $(i_1,j_1),\dots,(i_p,j_p)$ — все такие пары из $\mathbb{S}$, что $\lambda(i_1,j_1) = \lambda(i_2,j_2) = \ldots = \lambda(i_p,j_p) = k$, и пусть $\bar{U}_r = (U^1_{\xi(i_r,j_r,1)},\dots,U^{\nu}_{\xi(i_r,j_r,z(k))})$ при $r \in \{1,\dots,p\}$.

Для любой матрицы $\widehat{V} = \|V_{ij}\|_{q\times l}$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$ и любого набора $\bar{U} = (U_1,\dots,U_{\nu z(k)})$ из $\mathfrak{U}^{\nu z(k)}$ из равенства (4.4.2) получаем, что при любом $\bar{U} \notin \{\bar{U}_1,\dots,\bar{U}_p\}$ выполнено $f^k_{\widehat{V}}(U) = V_0$, а если при некотором r_0 из $\{1,\dots,p\}$ имеет место $\bar{U} = \bar{U}_{r_0}$, то $f^k_{\widehat{V}}(\bar{U}) = V_{i_{r_0}j_{r_0}}$. Итак, функция $f^k_{\widehat{V}}$ определена корректно, поскольку при $r_1 \neq r_2$ выполнено $\bar{U}_{r_1} \neq \bar{U}_{r_2}$ $(r_1, r_2 \in \{1,\dots,p\})$, что вытекает из определения набора $(\widehat{U}^1,\dots,\widehat{U}^{\nu})$.

Из (4.4.2) следует, что для всех $\widehat{V} \in \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$ выполнено равенство $u_{\widehat{V}}(\widehat{U}^1,\dots,\widehat{U}^{\nu}) = \widehat{V}$, а отсюда, заставляя матрицу-индекс $\widehat{V}$ пробегать все пространство $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$, получаем

$$\left\{ u(\bar{U}) \;\middle|\; u \in \mathrm{Hom}_{\Phi}(\mathfrak{C}^{\nu}_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})), \bar{U} \in \mathfrak{C}^{p}_{q,l}(\mathfrak{U}) \right\} = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V}). \tag{4.4.3}$$

Из выполнения (4.4.3) справедливость равенства (4.4.1) вытекает непосредственно.

Лемма доказана.

Итак, для произвольной допустимой функциональной сигнатуры φ категория Φ является полной и допустимой.

Лемма 4.4.2. Пусть φ — допустимая функциональная сигнатура и X — подмножество множества $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$, где $\mathfrak{U}$ — некоторое произвольное множество. Множество X является базой категории Φ тогда и только тогда, когда для любых различных (i_1,j_1) и (i_2,j_2) из множества $\mathbb{S}$ таких, что $\lambda(i_1,j_1) = \lambda(i_2,j_2)$, в множестве X существует матрица $\widehat{U} = \|U_{ij}\|_{q\times l}$ такая, что для некоторого k из множества $\{1,\dots,z(i_1,j_1)\}$ имеет место соотношение $U_{\xi(i_1,j_1,k)} \neq U_{\xi(i_2,j_2,k)}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть X — такое подмножество пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$, что для него не выполнено условие леммы, т.е. такое, что для некоторой пары (i_1,j_1) и (i_2,j_2) элементов множества $\mathbb{S}$ при том, что $(i_1,j_1) \neq (i_2,j_2)$ и $\lambda(i_1,j_1) = \lambda(i_2,j_2)$, для всех матриц $\widehat{U} = \|U_{ij}\|_{q\times l}$ из X и всякого k из $\{1,\dots,z(i_1,j_1)\}$ выполнено равенство $U_{\xi(i_1,j_1,k)} = U_{\xi(i_2,j_2,k)}$. Пусть также p — некоторое произвольное натуральное число.

Для любого морфизма u категории Φ из $\mathfrak{C}^p_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в данном случае из определения (4.3.5) получаем, что если $(\widehat{U}^1,\dots,\widehat{U}^p)$ — произвольный набор матриц из множества X^p, то в матрице $\widehat{U} = \|U_{ij}\|_{q\times l} = u(\widehat{U}^1,\dots,\widehat{U}^p)$ будет выполнено равенство $U_{i_1j_1} = U_{i_2j_2}$. Действительно, из (4.3.5) вытекает, что

$$U_{i_1j_1} = f^1_r(U^1_{\xi(i_1,j_1,1)},\dots,U^p_{\xi(i_1,j_1,z(r))}) \tag{4.4.4}$$

и
$$U_{i_2j_2} = f_r^1(U^1_{\xi(i_2,j_2,1)}, \dots, U^p_{\xi(i_2,j_2,z(r))}), \tag{4.4.5}$$
где $r = \lambda(i_1, j_1) = \lambda(i_2, j_2)$, а наборы аргументов функций в правых частях равенств (4.4.4) и (4.4.5) совпадают между собой.

Итак, имеем
$$\bigcup_{p=0}\Big\{u(\bar{U}) \;\Big|\; u \in \mathrm{Hom}_\Phi(\mathfrak{C}^\nu_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})), \bar{U} \in X^p\Big\} \subseteq$$
$$\subseteq \Big\{\widehat{U} \;\Big|\; \widehat{U} = \|U_{ij}\|_{q\times l} \in \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}), U_{i_1j_1} = U_{i_2j_2}\Big\} \subset \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}),$$
где последнее включение — строгое, т.к. $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$. Следовательно, множество X в данном случае не является базой категории Φ в пространстве $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$.

Достаточность. Пусть теперь X — подмножество пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$, для которого условие леммы выполнено, т.е. такое подмножество, что для любой пары $(i_1, j_2) \neq (i_2, j_2)$ элементов множества $\mathbb{S}$ такой, что $\lambda(i_1, j_1) = \lambda(i_2, j_2)$, в X имеется матрица $\widehat{U} = \|U_{ij}\|_{q\times l}$ и в $\{1, \dots, z(i_1, j_1)\}$ имеется индекс k такие, что $U_{\xi(i_1,j_1,k)} \neq U_{\xi(i_2,j_2,k)}$. Пусть, как и в доказательстве предыдущей леммы 4.4.1, $((i_1^1, j_1^1), (i_1^2, j_1^2)), \dots, ((i_\nu^1, j_\nu^1), (i_\nu^2, j_\nu^2))$ — все такие пары пар индексов из $\mathbb{S}$, что $(i_k^1, j_k^1) \neq (i_k^2, j_k^2)$ и $\lambda(i_k^1, j_k^1) = \lambda(i_k^2, j_k^2)$ при $k \in \{1, \dots, \nu\}$. В силу принятого предположения, каждой паре $((i_k^1, j_k^1), (i_k^2, j_k^2))$ можно сопоставить матрицу $\widehat{U}^k = \left\|U^k_{ij}\right\|_{q\times l}$ из X такую, что наборы
$$\left(U^k_{\xi(i_k^1,j_k^1,1)}, \dots, U^k_{\xi(i_k^1,j_k^1,z(i_k^1,j_k^1))}\right)$$
и
$$\left(U^k_{\xi(i_k^2,j_k^1,2)}, \dots, U^k_{\xi(i_k^2,j_k^1,z(i_k^2,j_k^2))}\right)$$
различаются хотя бы в одном месте (отметим, что разным парам при этом может соответствовать одна матрица из X).

Пусть, наконец, U_0 — некоторый произвольный фиксированный элемент множества $\mathfrak{U}$.

Определим теперь для каждой матрицы $\widehat{U} = \|U_{ij}\|_{q\times l}$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ соответствующее ей φ-отображение $u_{\widehat{U}}$ из $\mathfrak{C}^\nu_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ функциями $f^k_{\widehat{U}}(k \in \{1, \dots, t\})$: при произвольном наборе $\bar{U} = (U_1, \dots, U_{\nu z(k)})$ из $\mathfrak{U}^{\nu z(k)}$
$$f^k_{\widehat{U}}(\widehat{U}) = \begin{cases} U_{ij} & \text{если } \lambda(i,j) = k \text{ и } \bar{U} = \left(U^1_{\xi(i,j,1)}, \dots, U^\nu_{\xi(i,j,z(k))}\right); \\ U_0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{4.4.6}$$

В силу условия выбора набора матриц $\widehat{U}^1, \dots, \widehat{U}^\nu$ функции $f^k_{\widehat{U}}$ задаются равенством (4.4.2) корректно при всех $\widehat{U}$ и k, что проверяется так же, как и в доказательстве предыдущей леммы. Кроме того ясно, что для них выполнено равенство
$$u_{\widehat{U}}(\widehat{U}^1, \dots, \widehat{U}^\nu) = \widehat{U}. \tag{4.4.7}$$

Заставляя в (4.4.7) матрицу-индекс $\widehat{U}$ пробегать все пространство $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$, получаем
$$\Big\{u_{\widehat{U}}(\widehat{U}^1, \dots, \widehat{U}^\nu) \;\Big|\; \widehat{U} \in \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})\Big\} = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}).$$

Тем более
$$\Big\{u(\bar U)\ \Big|\ u\in \mathrm{Hom}_\Phi(\mathfrak{C}^{\nu}_{q,l}(\mathfrak{U}),\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})),\bar U\in X^{\nu}\Big\}=\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$$
и, наконец,
$$\bigcup_{p=0}\Big\{u(\bar U)\ \Big|\ u\in \mathrm{Hom}_\Phi(\mathfrak{C}^{p}_{q,l}(\mathfrak{U}),\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})),\bar U\in X^{p}\Big\}=\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}),$$
что и требовалось, т.е. множество X в данном случае является базой категории Φ в пространстве $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$.

Лемма доказана.

Следствие 4.4.3. Пусть φ — допустимая функциональная сигнатура и $\widehat{U}=\|U_{ij}\|_{q\times l}$ — матрица из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$, где $\mathfrak{U}$ — некоторое произвольное множество. Одноэлементное множество $\{\widehat{U}\}$ является базой категории Φ тогда и только тогда, когда для любых $(i_1,j_1)\neq$ $\neq(i_2,j_2)$ из множества $\mathbb{S}$ таких, что $\lambda(i_1,j_1)=\lambda(i_2,j_2)$, для некоторого $k\in\{1,\ldots,z(i_1,j_1)\}$ выполнено $U_{\xi(i_1,j_1,k)}\neq U_{\xi(i_2,j_2,k)}$.

4.5 Соотношение симметрических и функциональных универсальных ограничений и категорий

Предметом рассмотрения в данном и в следующем параграфах будет важный для приложений вопрос о том, как соотносятся симметрческие и функциональные ограничения и категории и когда в процессе решения их можно менять друг на друга.

Нетрудно заметить, что одно и то же отображение, скажем, из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$, где $\mathfrak{U}$ — некоторое множество, может быть одновременно морфизмом различных и симметрических, и функциональных категорий. Более того, и множества морфизмов одной категории могут быть подмножествами морфизмов другой. Так, например, ясно, что если даны σ_1 и σ_2 — подгруппы группы σ_0 и σ_1 — подгруппа группы σ_2, то категория Σ_2 оказывается подкатегорией категории Σ_1 (это легко понять, заметив, что каждая из подстановок группы σ является по сути дела ограничением для отображений — морфизмов соответствующей категории Σ, а потому чем больше в группе подстановок, тем меньше, вообще говоря, морфизмов соответствующей категории).

Отметим, в частности, что «максимальные» симметрические и функциональные категории совпадают с $\Psi_{q,l}$, т.е. их морфизмами являются все отображения с соответствующими областями и кообластями (эти категории определяются тривиальной группой $\{e\}$, где e — тождественная подстановка, и сигнатурой $\varphi=(\mathbb{S}_{(1,1)},\ldots,\mathbb{S}_{(q,l)},\lambda\}$, где при всех (i,j) из $\mathbb{S}$ выполнены равенства $\mathbb{S}_{(i,j)}=((1,1),\ldots,(q,l))$ и, скажем, $\lambda(i,j)=i+(j-1)q$). «Минимальная» симметрическая категория определяется симметрической группой σ_0, «минимальная» функциональная категория — это описанная в параграфе 4.3 категория Φ_0. При этом категория Φ_0 оказывается подкатегорией категории Σ_0, морфизмами которой, помимо морфизмов категории Φ_0, являются, например, еще и операции типа нормирования действительных матриц.

Итак, одна симметрическая категория является подкатегорией другой, если определяющая ее группа содержит в качестве подгруппы группу, определяющую другую категорию. Функциональная категория, Φ определяемая функциональной сигнатурой $\varphi_1 = (\mathbb{S}^1_{(1,1)}, \ldots, \mathbb{S}^1_{(q,l)}, \lambda^1)$, является подкатегорией функцональной категории, определяемой функциональной сигнатурой $\varphi_2 = (\mathbb{S}^2_{(1,1)}, \ldots, \mathbb{S}^2_{(q,l)}, \lambda^2)$, если при всех (i,j) из $\mathbb{S}$ выполнено условие $\mathbb{S}^1_{(i,j)} \subseteq \mathbb{S}^2_{(i,j)}$ и для всех (i_1, j_1) и (i_2, j_2) из $\mathbb{S}$ верна импликация

$$\left(\lambda^2(i_1, j_1) = \lambda^2(i_2, j_2)\right) \to \left(\lambda^1(i_1, j_1) = \lambda^1(i_2, j_2)\right).$$

Симметрические категории могут быть подкатегориями только функциональных категорий, определяемых функциональными сигнатурами $\varphi = (\mathbb{S}_{(1,1)}, \ldots, \mathbb{S}_{(q,l)}, \lambda)$, в которых при всех (i,j) из $\mathbb{S}$ множества $\mathbb{S}_{(i,j)}$ совпадают по составу с $\mathbb{S}$. В этом можно убедиться, рассмотрев, скажем, оператор нормирования действительных матриц на сумму 1, который является морфизмом всех симметрических категорий. Поскольку описанные функциональные категории не представляют практического интереса, то в дальнейшем рассмотрение будет ограничено изучением важного для приложений вопроса об условиях, при выполнении которых функциональные категории оказываются подкатегориями симметрических.

Определение 4.5.1. Для допустимой функциональной сигнатуры $\varphi = (\mathbb{S}_{(1,1)}, \ldots, \mathbb{S}_{(q,l)}, \lambda)$ группой σ_φ называется подгруппа симметрической группы σ_0, состоящая из всех подстановок s, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} \lambda(s(i,j)) &= \lambda(i,j) \quad \text{— для всех } (i,j) \in \mathbb{S}; & (4.5.1)\\ s(\xi(i,j,k)) &= \xi(s(i,j),k) \quad \text{— для всех } (i,j) \in \mathbb{S} \text{ и } k \in \{1, \ldots, z(i,j)\}. & (4.5.2) \end{aligned}$$

Корректность определения, т.е. то, что множество всех подстановок, удовлетворяющих условиям (4.5.1) и (4.5.2), образует подгруппу группы σ_0, проверяется непосредственно.

Лемма 4.5.1. Для любой допустимой функциональной сигнатуры φ категория Φ является подкатегорией симметрической категории Σ_φ.

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать, что для любых множеств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ и натуральных чисел p_1 и p_2 все морфизмы u категории Φ из $\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V})$ коммутируют с произвольными подстановками s из группы σ_φ, т.е. что для любого элемента $(\widehat{U}^1, \ldots, \widehat{U}^{p_1})$ пространства $\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$ выполнено равенство

$$u(s(\widehat{U}^1, \ldots, \widehat{U}^{p_1})) = s(u(\widehat{U}^1, \ldots, \widehat{U}^{p_1})). \tag{4.5.3}$$

Итак, пусть $(\widehat{U}^1, \ldots, \widehat{U}^{p_1})$ — произвольный набор матриц из $\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$, s — подстановка из σ_φ и u — морфизм категории Φ из $\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V})$).

Предположим, что

$$\left(\left\|V^1_{ij}\right\|_{q\times l}, \ldots, \left\|V^{p_2}_{ij}\right\|_{q\times l}\right) = u\left(\left\|U^1_{ij}\right\|_{q\times l}, \ldots, \left\|U^{p_1}_{ij}\right\|_{q\times l}\right).$$

Из соотношения (4.3.5), определяющего свойства отображения u, имеем, считая, что морфизм u определен набором функций $f_1^1, \ldots, f_t^{p_2}$, при всех $k \in \{1, \ldots, p_2\}$ и $(i,j) \in \mathbb{S}$:

$$V_{ij}^k = f_{\lambda(i,j)}^k \left(U_{\xi(i,j,1)}^1, \ldots, U_{\xi(i,j,z(i,j))}^{p_1} \right). \tag{4.5.4}$$

Считая $\left(\left\| V_{ij}^{\prime 1} \right\|_{q \times l}, \ldots, \left\| V_{ij}^{\prime p_2} \right\|_{q \times l} \right) = s\left(u(\widehat{U}^1, \ldots, \widehat{U}^{p_1}) \right)$, получаем:

$$V_{ij}^{\prime k} = V_{s(i,j)}^k = f_{\lambda(s(i,j))}^k \left(U_{\xi(s(i,j),1)}^1, \ldots, U_{\xi(s(i,j),z(s(i,j)))}^{p_1} \right). \tag{4.5.5}$$

А для $\left(\left\| V_{ij}^{\prime\prime 1} \right\|_{q \times l}, \ldots, \left\| V_{ij}^{\prime\prime p_2} \right\|_{q \times l} \right) = u\left(s(\widehat{U}^1, \ldots, \widehat{U}^{p_1}) \right)$, имеем:

$$V_{ij}^{\prime\prime k} = f_{\lambda(i,j)}^k \left(U_{s(\xi(i,j,1))}^1, \ldots, U_{s(\xi(i,j,z(i,j)))}^{p_1} \right). \tag{4.5.6}$$

Так как в силу определения группы σ_φ при всех (i,j) из множества $\mathbb{S}$ выполнены равенства $\lambda(s(i,j)) = \lambda(i,j)$ и $s(\xi(i,j,k)) = \xi(s(i,j),k)$ (при $k \in \{1, \ldots, z(i,j)\}$), то правые части равенств (4.5.5) и (4.5.6) совпадают. Итак, при всех $k \in \{1, \ldots, p_2\}$ и $(i,j) \in \mathbb{S}$ выполнено $V_{ij}^{\prime k} = V_{ij}^{\prime\prime k}$, что и означает выполнение равенства (4.5.3).

Лемма доказана.

Лемма 4.5.2. Пусть φ — допустимая функциональная сигнатура и σ — подгруппа симметрической группы σ_0. Если функциональная категория Φ является подкатегорией симметрической категории Σ, то группа σ является подгруппой группы σ_φ.

Доказательство. Пусть для допустимой функциональной сигнатуры φ и подгруппы σ симметрической группы σ_0 выполнено условие леммы, и пусть s — произвольная подстановка из группы σ. Для доказательства леммы достаточно показать, что при этом s с необходимостью оказывается подстановкой и из σ_φ.

По предположению для любого множества $\mathfrak{U}$ имеет место включение

$$\mathrm{Hom}_\Phi(\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})) \subseteq \mathrm{Hom}_\Sigma(\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})) \tag{4.5.7}$$

Рассмотрим в качестве $\mathfrak{U}$ множество натуральных чисел $\{1, \ldots, ql\}$, обозначив его $\mathfrak{U}_0$.

Пусть u — произвольный морфизм категории Φ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}_0)$ в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}_0)$, задаваемый набором функций $f_1, \ldots, f_t$. Из включения (4.5.7) следует, что φ-отображение u коммутирует с подстановкой s, т.е. что для произвольной матрицы $\|U_{ij}\|_{q \times l}$ из пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}_0)$ выполнено равенство $u(s(\|U_{ij}\|_{q \times l})) = s(u(\|U_{ij}\|_{q \times l}))$. Это равенство означает, что при всех (i,j) из $\mathbb{S}$ выполнено

$$f_{\lambda(i,j)} \left(U_{s(\xi(i,j,1))}, \ldots, U_{s(\xi(i,j,z(i,j)))} \right) = f_{\lambda(s(i,j))} \left(U_{\xi(s(i,j),1)}, \ldots, U_{\xi(s(i,j),z(s(i,j)))} \right). \tag{4.5.8}$$

Рассматривая конкретное φ-отображение u_0, заданное набором функций-констант $f_k(\bar{U}) \equiv k$ (при всех k из множества $\{1, \ldots, t\}$ и всех векторов $\bar{U}$ из $\mathfrak{U}_0^{z(k)}$), из равенства (4.5.8) получаем, что для всех $(i,j) \in \mathbb{S}$ выполнено

$$\lambda(s(i,j)) = \lambda(i,j). \tag{4.5.9}$$

Пусть теперь (i_0, j_0) — некоторый произвольный элемент множества $\mathbb{S}$, k_0 — элемент множества $\{1, \ldots, z(i_0, j_0)\}$ и $\widehat{U}^0 = \left\|U^0_{ij}\right\|_{q\times l}$ — матрица из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}_0)$, все элементы которой попарно различны. Рассматривая φ-отображение, задаваемое набором функций $f_1, \ldots, f_t$ таких, что при произвольном наборе $(U_1, \ldots, U_{z(i,j)})$ из $\mathfrak{U}_0^{z(i_0,j_0)}$ выполнено условие $f_{\lambda(i_0,j_0)}(U_1, \ldots, U_{z(i_0,j_0)}) = U_{k_0}$, находим, что равенство (4.5.8) приводит к $U^0_{s(\xi(i_0,j_0,k_0))} = U^0_{\xi(s(i_0,j_0),k_0)}$, что в силу выбора матрицы $\widehat{U}^0$ влечет равенство

$$s(\xi(i_0, j_0, k_0)) = \xi(s(i_0, j_0), k_0). \tag{4.5.10}$$

Выполнение для произвольных (i, j) из $\mathbb{S}$ и произвольных k из $\{1, \ldots, z(i, j)\}$ равенств (4.5.9) и (4.5.10) и означает (определение 4.5.1), что подстановка s принадлежит группе σ_φ. Поскольку s — поизвольная подстановка из группы σ, то σ оказывается подгруппой группы σ_φ, что и требовалось.

Лемма доказана.

Итак, любая функциональная категория оказывается подкатегорией однозначно соответствующей ей симметрической категории. Для функциональной категории, определяемой сигнатурой φ, симметрическая категория, определяема группой σ_φ, оказывается при этом минимальной в том смысле, что Φ является подкатегорией тех и только тех симметрических категорий, для которых и Σ_φ является подкатегорией.

4.6 Полнота функциональных категорий в симметрических

Вопрос об условиях, при которых функциональные категории оказываются подкатегориями симметрических, решен в предыдущем параграфе. Теперь же будет получено решение вопроса об условиях, обеспечивающих Г-полноту функциональных категорий в соответствующих симметрических, точнее — вопрос о том, когда функциональная категория, определяемая сигнатурой φ, является Г-полной подкатегорией соответствующей симметрической категории Σ_φ.

По определению 3.4.7 категория Φ является Г-полной подкатегорией категории Σ_φ тогда и только тогда, когда в любом постранстве матриц любая база категории Σ_φ оказывается одновременно и базой категории Φ (обратное выполнено всегда и вытекает просто из того, что Φ — подкатегория категории Σ_φ). Поэтому нашей целью будет поиск ограничений на функциональные сигнатуры, обеспечивающих выполнение этого условия.

Лемма 4.6.1. Функциональная категория Φ с допустимой функциональной сигнатурой $\varphi = (\mathbb{S}_{(1,1)}, \ldots, \mathbb{S}_{(q,l)}, \lambda)$, может быть Г-полной подкатегорией симметрической категории Σ_φ только тогда, когда для любых $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ из $\mathbb{S}$ таких, что $\lambda(i_1, j_1) = \lambda(i_2, j_2)$, в группе σ_φ имеется нетождественная подстановка s_0 такая, что для любого элемента (i, j) множества $\mathbb{S}$, не принадлежащего объединению $\mathbb{S}_{(i_1,j_1)} \cup \mathbb{S}_{(i_2,j_2)}$, выполнено равенство $s_0(i, j) = (i, j)$.

Доказательство. Из описания баз симметрических и функциональных категорий (леммы 4.2.3 и 4.4.2) вытекает, что категория Φ является Γ-полной подкатегорией категории Σ_φ тогда и только тогда, когда для любого подмножества X любого пространства матриц $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ выполнено условие: если для всякой неединичной подстановки s из группы σ_φ в X имеется матрица $\widehat{U}$ такая, что для нее $s(\widehat{U}) \neq \widehat{U}$, то для всех пар индексов $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ из $\mathbb{S}$ таких, что $\lambda(i_1, j_1) = \lambda(i_2, j_2)$, должны существовать матрица $\widehat{U} = \|U_{ij}\|_{q\times l}$ в X и индекс k в $\{1, \ldots, z(i_1, j_1) = z(i_2, j_2)\}$ такие, что $U_{\xi(i_1,j_1,k)} \neq U_{\xi(i_2,j_2,k)}$.

Последнее условие можно, очевидно, записать в следующей эквивалентной форме: если в $\mathbb{S}$ имеются две различные пары индексов (i_1, j_1) и (i_2, j_2) такие, что $\lambda(i_1, j_1) = \lambda(i_2, j_2)$, и, в то же время такие, что для любой матрицы $\widehat{U} = \|U_{ij}\|_{q\times l}$ из X и любого k из $\{1, \ldots, z(i_1, j_1)\}$ выполнено $U_{\xi(i_1,j_1,k)} = U_{\xi(i_2,j_2,k)}$, то для некоторой неединичной подстановки s_0 из группы σ_φ и для всех матриц $\widehat{U}$ из X должно выполняться $s_0(\widehat{U}) = \widehat{U}$.

Выберем в качестве $\mathfrak{U}$ набор $\mathfrak{U}_0 = \{1, \ldots, ql\}$.

Пусть $((i_1^1, j_1^1), (i_1^2, j_1^2)), \ldots, ((i_\nu^1, j_\nu^1), (i_\nu^2, j_\nu^2))$ — все такие пары пар индексов из $\mathbb{S}$, что $(i_k^1, j_k^1) \neq (i_k^2, j_k^2)$ и $\lambda(i_k^1, j_k^1) = \lambda(i_k^2, j_k^2)$ при $k \in \{1, \ldots, \nu\}$. Каждому k сопоставим теперь матрицу $\widehat{U}^k = \left\|U_{ij}^k\right\|_{q\times l}$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}_0)$ такую, что в ней равенство $U_{i_1 j_1}^k = U_{i_2 j_2}^k$ будет иметь место тогда и только тогда, когда $\{(i_1, j_1), (i_2, j_2)\} \subseteq \mathbb{S}(k)$, где $\mathbb{S}(k) = \mathbb{S}_{(i_k^1, j_k^1)} \cup \mathbb{S}_{(i_k^2, j_k^2)}$. Таким образом в матрице $\widehat{U}^k$ все элементы U_{ij} с индексами (i, j) из $\mathbb{S}(k)$ равны между собой и отличны от попарно различных между собой остальных элементов.

Легко видеть, что в матрицах $\widehat{U}^k$ для всех p из множества $\{1, \ldots, z(i_k^1, j_k^1)\}$ выполнено равенство $U^k_{\xi(i_k^1, j_k^1, p)} = U^k_{\xi(i_k^2, j_k^2, p)}$.

Рассматривая одноэлементные множества $X = \{\widehat{U}^k\}$ при $k \in \{1, \ldots, \nu\}$, не являющиеся базами категории Φ, получаем, что категория Φ может быть полна в категории Σ_φ только если для каждого k в группе σ_φ содержится нетождественная подстановка s_k такая, что

$$s_k(\widehat{U}^k) = \widehat{U}^k. \tag{4.6.1}$$

Учитывая условие выбора матриц $\widehat{U}^k$, из равенства (4.6.1) получаем, что для всех пар (i, j) из $\mathbb{S}$, не принадлежащих объединению $\mathbb{S}(k)$, выполнено соотношение $s_k(i, j) = (i, j)$, что и требовалось.

Лемма доказана.

Лемма 4.6.2. Функциональная категория Φ с допустимой функциональной сигнатурой $\varphi = (\mathbb{S}_{(1,1)}, \ldots, \mathbb{S}_{(q,l)}, \lambda)$ может быть Γ-полной подкатегорией симметрической категории Σ_φ только тогда, когда сигнатура φ удовлетворяет условию

$$\underset{\mathbb{S}}{\forall}(i_1, j_1)\left(\left(\underset{\mathbb{S}}{\exists}(i_2, j_2)(\mathbb{S}_{(i_1,j_1)} \subset \mathbb{S}_{(i_2,j_2)})\right) \to \left(|\lambda^{-1}(\lambda(i_1, j_1))| = 1\right)\right), \tag{4.6.2}$$

где $\lambda^{-1}(\lambda(i_1, j_1))$ — класс ядерной эквивалентности для отображения λ, содержащий (i_1, j_1), и $|\lambda^{-1}(\lambda(i_1, j_1))|$ — мощность (число элементов) этого класса.

Доказательство. Допустим, что категория Φ является Γ-полной подкатегорией категории Σ_φ, но в то же время существуют (i_1, j_1) и (i_2, j_2) в $\mathbb{S}$ такие, что выполнены условия

$\mathbb{S}_{(i_1,j_1)} \subset \mathbb{S}_{(i_2,j_2)}$ и $|\lambda^{-1}(\lambda(i_1,j_1))| > 1$. Из последнего неравенства вытекает, что имеется и пара индексов (i_3,j_3) такая, что $(i_3,j_3) \neq (i_1,j_1)$ и $\lambda(i_3,j_3) = \lambda(i_1,j_1)$.

В силу леммы 4.6.1 в группе σ_φ в рассматриваемом случае имеется нетождественная подстановка s_0 такая, что для всех (i,j) из дополнения $\mathbb{S}$ до $\mathbb{S}_{(i_1,j_1)} \cup \mathbb{S}_{(i_3,j_3)}$ выполнено равенство $s_0(i,j) = (i,j)$.

Пара индексов (i_2,j_2) не может принадлежать объединению $\mathbb{S}_{(i_1,j_1)} \cup \mathbb{S}_{(i_3,j_3)}$. Действительно, если $(i_2,j_2) \in \mathbb{S}_{(i_1,j_1)}$, то в силу того, что функциональная сигнатура φ допустима (определение 4.3.2), множество $\mathbb{S}_{(i_2,j_2)}$ должно быть подмножеством множества $\mathbb{S}_{(i_1,j_1)}$, что потиворечит предположению о выполнении срогого включения $\mathbb{S}_{(i_1,j_1)} \subset \mathbb{S}_{(i_2,j_2)}$. Если же (i_2,j_2) принадлежит $\mathbb{S}_{(i_3,j_3)}$, то должно быть выполнено $\mathbb{S}_{(i_2,j_2)} \subseteq \mathbb{S}_{(i_3,j_3)}$, но тогда из $\lambda(i_1 j_1) = \lambda(i_3,j_3)$ следует, что $z(i_1,j_1) = z(i_3,j_3)$, а из $\mathbb{S}_{(i_1,j_1)} \subset \mathbb{S}_{(i_2,j_2)}$ — что $z(i_1,j_1) <$ $< z(i_2,j_2)$, так что $z(i_3,j_3) < z(i_2,j_2)$, что исключается в силу $\mathbb{S}_{(i_2,j_2)} \subseteq \mathbb{S}_{(i_3,j_3)}$ (напомним, что по определению $z(i,j)$ — число элементов конечного множества $\mathbb{S}_{(i,j)}$ при $(i,j) \in \mathbb{S}$).

Из вышесказанного вытекает вывод о том, что для подстановки s_0 и (i_2,j_2) выполнено равенство

$$s_0(i_2,j_2) = (i_2,j_2). \tag{4.6.3}$$

Используя его и условие 4.5.2 из определения группы σ_φ, получаем цепочку равенств

$$s_0(i_1,j_1) = s_0(\xi(i_2,j_2,k)) = \xi(s_0(i_2,j_2),k) = \xi(i_2,j_2,k) = (i_1,j_1),$$

где k — индекс из $\{1,\dots,z(i_2,j_2)\}$ такой, что $(i_1,j_1) = \xi(i_2,j_2,k)$.

Если кроме (4.6.3) для подстановки s_0 выполнено и равенство

$$s_0(i_3,j_3) = (i_3,j_3), \tag{4.6.4}$$

то подстановка s_0 оказывается с необходимостью тождественной, поскольку для любого k из $\{1,\dots,z(i_1,j_1) = z(i_2,j_2)\}$ имеют место цепочки равенств

$$s_0(\xi(i_1,j_1,k)) = \xi(s_0(i_1,j_1),k) = \xi(i_1,j_1,k)$$

и

$$s_0(\xi(i_3,j_3,k)) = \xi(s_0(i_3,j_3),k) = \xi(i_3,j_3,k).$$

Тождественность подстановки s_0 противоречит предположению, так что случай (4.6.4) невозможен.

Допустим теперь, что

$$s_0(i_3,j_3) \neq (i_3,j_3). \tag{4.6.5}$$

Это соотношение эквивалентно тому, что $k_1 \neq k_2$, где индексы k_1 и k_2 определяются равенствами $(i_3,j_3) = \xi(i_3,j_3,k_1)$ и $s_0(i_3,j_3) = \xi(i_3,j_3,k_2)$. В этом случае из того, что сигнатура φ допустима (см. определение 4.3.2) и из условия 4.5.1, выполненного для подстановки s_0 из группы σ_φ, получаем

$$\lambda(i_3,j_3) = \lambda(s_0(i_3,j_3)) = \lambda(\xi(i_3,j_3,k_1)) = \lambda(\xi(i_3,j_3,k_2)) =$$
$$= \lambda(\xi(i_1,j_1,k_1)) = \lambda(\xi(i_1,j_1,k_2)) = \lambda(i_1,j_1).$$

Снова применяя лемму 4.6.1, находим, что в группе σ_φ в данном случае должна иметься нетождественная подстановка s_1 такая, что для любой пары индексов (i,j) из дополнения $\mathbb{S}$ до $\mathbb{S}_{(i_1,j_1)}$ выполнено равенство $s_1(i,j)=(i,j)$. Действительно, $\xi(i_1,j_1,k_2)\in\mathbb{S}_{(i_1,j_1)}$ и, следовательно, $\mathbb{S}_{\xi(i_1,j_1,k_2)}\subseteq\mathbb{S}_{(i_1,j_1)}$, а так как $\lambda(\xi(i_1,j_1,k_2))=\lambda(i_1,j_1)$, то и $z(\xi(i_1,j_1,k_2))= = z(i_1,j_1)$. Итак, выполнены равенства

$$\mathbb{S}_{\xi(i_1,j_1,k_2)}=\mathbb{S}_{(i_1,j_1)}$$

и

$$\mathbb{S}_{\xi(i_1,j_1,k_2)}\cup\mathbb{S}_{(i_1,j_1)}=\mathbb{S}_{(i_1,j_1)}.$$

Теперь остается применить лемму 4.6.1, полагая $(i_2,j_2)=\xi(i_1,j_1,k_2)$.

Таким образом, в данном случае в группе σ_φ должна иметься нетождественная подстановка s_1 такая, что для всех пар (i,j) из дополнения $\mathbb{S}$ до $\mathbb{S}_{(i_1,j_1)}$ выполнено равенство $s_1(i,j)=(i,j)$. Но тогда, как и выше, находим, что при всех k из $\{1,\ldots,z(i_2,j_2)\}$ выполнено равенство $s_1(\xi(i_2,j_2,k))=\xi(i_2,j_2,k)$ и потому, $s_1(i_1,j_1)=(i_1,j_1)$, т.е. снова получаем, что s_1 вопреки предположению — тождественная подстановка.

Лемма доказана.

Лемма 4.6.3. Пусть φ — допустимая функциональная сигнатура, удовлетворяющая условию (4.6.2) и (i_1,j_1) и (i_2,j_2) — различные пары индексов из множества $\mathbb{S}$ такие, что для них выполнены равенства $\lambda(i_1,j_1)=\lambda(i_2,j_2)$ и $\mathbb{S}_{(i_1,j_1)}=\mathbb{S}_{(i_2,j_2)}$. Тогда в группе σ_φ содержится подстановка s_0 такая, что

$$\begin{cases} s_0(\xi(i_1,j_1,k))=\xi(i_2,j_2,k) & \text{— при всех } k \text{ из } \{1,\ldots,z(i_1,j_1)\},\\ s_0(i,j)=(i,j) & \text{— при } (i,j)\in\mathbb{S}-\mathbb{S}_{(i_1,j_1)}. \end{cases} \tag{4.6.6}$$

Доказательство. Легко видеть, что подстановка s_0 определена равенствами (4.6.6) корректно. Покажем, что подстановка s_0 входит в группу σ_φ, т.е. что для s_0 выполнены условия (4.5.1) и (4.5.2).

Выполнение условия (4.5.1), т.е. то, что имеет место равенство $\lambda(s_0(i,j))=\lambda(i,j)$, очевидно для всех (i,j) из дополнения $\mathbb{S}$ до $\mathbb{S}_{(i_1,j_1)}$. Для $(i,j)\in\mathbb{S}_{(i_1,j_1)}$ в силу допустимости функциональной сигнатуры φ имеем цепочку

$$\lambda(s_0(i,j))=\lambda(s_0(\xi(i_1,j_1,k)))=\lambda(\xi(i_2,j_2,k))=\lambda(\xi(i_1,j_1,k))=\lambda(i,j),$$

где индекс k определяется условием $\xi(i_1,j_1,k)=(i,j)$. Итак, равенство (4.5.1) выполнено для всех пар (i,j) из множества $\mathbb{S}$.

Проверим теперь для подстановки s_0 выполнение условия (4.5.2), т.е. покажем, что для всех (i,j) из $\mathbb{S}$ и всех k из множества $\{1,\ldots,z(i,j)\}$ выполнено равенство

$$s_0(\xi(i,j,k))=\xi(s_0(i,j),k).$$

Пусть (i,j) — пара из дополнения $\mathbb{S}$ до $\mathbb{S}_{(i_1,j_1)}$. Положим $\mathbb{S}^0=\mathbb{S}_{(i,j)}\cap\mathbb{S}_{(i_1,j_1)}$. Для $k\in \in\{1,\ldots,z(i,j)\}$ таких, что $\xi(i,j,k)\in\mathbb{S}-\mathbb{S}^0$, имеем $s_0(\xi(i,j,k))=\xi(i,j,k)=\xi(s_0(i,j),k)$.

Если же $\xi(i,j,k) \in \mathbb{S}^0$, то, во-первых, $\xi(i,j,k) = \xi(i_1,j_1,k_1)$ при соответствующем k_1 из множества $\{1,\ldots,z(i_1,j_1)\}$, и, во-вторых, в силу допустимости сигнатуры φ имеет место включение $\mathbb{S}_{\xi(i,j,k)} \subseteq \mathbb{S}^0$. Отсюда вытекает строгое включение $\mathbb{S}_{\xi(i,j,k)} \subset \mathbb{S}_{(i,j)}$, что вместе с предположением о выполнении условия (4.6.2) влечет равенство $|\lambda^{-1}(\lambda(\xi(i,j,k)))| = 1$.

Из последнего равенства вытекает, что выполнено и равенство $\xi(i_1,j_1,k_1) = \xi(i_2,j_2,k_1)$, а потому верна и следующая цепочка:

$$s_0(\xi(i,j,k)) = s_0(\xi(i_2,j_2,k_1)) = \xi(i_2,j_2,k_1) = \xi(i_1,j_1,k_1) = \xi(i,j,k) = \xi(s_0(i,j),k).$$

Итак, для всех (i,j) из дополнения $\mathbb{S}$ до $\mathbb{S}_{(i_1,j_1)}$ и всех k из $\{1,\ldots,z(i,j)\}$ равенство (4.5.2) выполнено.

Допустим теперь, что (i,j) — элемент $\mathbb{S}_{(i_1,j_1)}$. В этом случае при некотором k_0 из $\{1,\ldots,z(i_1,j_1)\}$ выполнено $(i,j) = \xi(i_1,j_1,k_0)$. Из условия (4.6.6) получаем, что тогда $s_0(i,j) = \xi(i_2,j_2,k_0)$.

Пусть k — произвольный элемент из $\{1,\ldots,z(i,j)\}$. Из условия допустимости функциональной сигнатуры φ в этом случае получаем, что в множестве $\{1,\ldots,z(i_1,j_1) = z(i_2,j_2)\}$ имеется k_1 такое, что $\xi(\xi(i_1,j_1,k_0),k) = \xi(i_1,j_1,k_1)$ и $\xi(\xi(i_2,j_2,k_0),k) = \xi(i_2,j_2,k_1)$. Поэтому верна следующая цепочка равенств:

$$\begin{gathered} s_0(\xi(i,j,k)) = s_0(\xi(\xi(i_1,j_1,k_0),k)) = s_0(\xi(i_1,j_1,k_1)) = \\ = \xi(i_2,j_2,k_1) = \xi(\xi(i_2,j_2,k_0),k) = \xi(s_0(i,j),k), \end{gathered}$$

что и требовалось.

Итак, условие (4.5.2) выполняется и для всех (i,j) из множества $\mathbb{S}_{(i_1,j_1)}$.

Лемма доказана.

Лемма 4.6.4. Если допустимая функциональная сигнатура φ удовлетворяет условию (4.6.2) и (i_1,j_1) и (i_2,j_2) — различные пары индексов из $\mathbb{S}$ такие, что для них выполнены соотношения $\lambda(i_1,j_1) = \lambda(i_2,j_2)$ и $\mathbb{S}_{(i_1,j_1)} \neq \mathbb{S}_{(i_2,j_2)}$, то в группе σ_φ содержится подстановка s_0 такая, что при всех k из $\{1,\ldots,z(i_1,j_1) = z(i_2,j_2)\}$ выполнены равенства $s_0(\xi(i_1,j_1,k)) = \xi(i_2,j_2,k)$ и $s_0(\xi(i_2,j_2,k)) = \xi(i_1,j_1,k)$ и при всех (i,j) из дополнения $\mathbb{S}$ до $\mathbb{S}^0 = \mathbb{S}_{(i_1,j_1)} \cup \mathbb{S}_{(i_2,j_2)}$ выполнено равенство $s_0(i,j) = (i,j)$.

Доказательство. Покажем прежде всего, что подстановка s_0 определена условием леммы корректно. Для пар (i,j) из дополнения $\mathbb{S}$ до $\mathbb{S}^0$ это очевидно.

Представим теперь $\mathbb{S}^0$ в виде суммы дизъюнктных множеств $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{S}^3$, т.е. положим $\mathbb{S}^0 = \mathbb{S}^1 \cup \mathbb{S}^2 \cup \mathbb{S}^3$, где $\mathbb{S}^3 = \mathbb{S}_{(i_1,j_1)} \cap \mathbb{S}_{(i_2,j_2)}$, $\mathbb{S}^1 = \mathbb{S}_{(i_1,j_1)} - \mathbb{S}^3$ и $\mathbb{S}^2 = \mathbb{S}_{(i_2,j_2)} - \mathbb{S}$. Отметим, что множества $\mathbb{S}^1$ и $\mathbb{S}^2$ не пусты.

Из условия, определяющего подстановку s_0, вытекает, что s_0 является взаимно однозначным отображением $\mathbb{S}^1$ и $\mathbb{S}^2$ друг на друга, т.е. что s_0 на $\mathbb{S}^1 \cup \mathbb{S}^2$ определена корректно. Поэтому остается проверить, что s_0 определена корректно и на множестве $\mathbb{S}^3$, но это вытекает из того, что на этом множестве s_0 является тождественным отображением.

Действительно, если (i,j) — произвольный элемент множества $\mathbb{S}^3$, то выполнено строгое (в силу непустоты $\mathbb{S}^1$) включение $\mathbb{S}_{(i,j)} \subset \mathbb{S}_{(i_1,j_1)}$. Поэтому из предположения о выполнении условия (4.6.2) следует, что при некотором k из множества $\{1,\ldots,z(i_1,j_1) = z(i_2,j_2)\}$

верны следующие равенства: $(i,j) = \xi(i_1,j_1,k) = \xi(i_2,j_2,k)$. Отсюда вытекает, что равенства из условия леммы сводятся к $s_0(i,j) = (i,j)$.

Итак, подстановка s_0 определена корректно при всех (i,j) из $\mathbb{S}$.

Для доказательства леммы остается проверить, что s_0 входит в группу σ_φ.

Выполнение условия (4.5.1) очевидно для пар (i,j) из дополнения $\mathbb{S}$ до $\mathbb{S}^1 \cup \mathbb{S}^2$, поскольку на этом дополнении подстановка s_0 сводится к тождественному отображению.

Пусть (i,j) — пара из множества $\mathbb{S}^1$. Тогда при некотором k из множества $\{1,\ldots,z(i_1,j_1)\}$ выполнено равенство $(i,j) = \xi(i_1,j_1,k)$. Поэтому из условия леммы, определяющего значения s_0, и из допустимости сигнатуры φ получаем цепочку равенств

$$\lambda(s_0(i,j)) = \lambda(s_0(\xi(i_1,j_1,k))) = \lambda(\xi(i_2,j_2,k)) = \lambda(\xi(i_1,j_1,k)) = \lambda(i,j).$$

Случай $(i,j) \in \mathbb{S}^2$ разбирается аналогично.

Доказательство того, что для подстановки s_0 выполнено условие (4.5.2), повторяет построения, проведенные в доказательстве предыдушей леммы.

Лемма доказана.

Лемма 4.6.5. Функциональная категория Φ с допустимой функциональной сигнатурой $\varphi = (\mathbb{S}_{(1,1)},\ldots,\mathbb{S}_{(q,l)},\lambda)$ является Γ-полной подкатегорией симметрической категории Σ_φ, если сигнатура φ удовлетворяет условию (4.6.2).

Доказательство. Пусть φ — допустимая функциональная сигнатура, удовлетворяющая условию (4.6.2), $\mathfrak{U}$ — произвольное множество и X — подмножество пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$, являющееся базой категории Σ_φ. Для доказательства леммы требуется показать, что в этом случае множество X оказывается базой категории Φ.

Из леммы 4.2.3 вытекает, что при сделанном предположении для любой нетождественной подстановки s_0 из группы σ_φ в множестве X содержится матрица $\widehat{U}$ такая, что $s_0(\widehat{U}) \neq \widehat{U}$. Требуется же показать (лемма 4.4.2), что в таком случае для любых двух различных пар (i_1,j_1) и (i_2,j_2) из множества $\mathbb{S}$ таких, что $\lambda(i_1,j_1) = \lambda(i_2,j_2)$ в множестве X содержится матрица $\widehat{U} = \|U_{ij}\|_{q\times l}$ такая, что при некотором k из $\{1,\ldots,z(i_1,j_1) = z(i_2,j_2)\}$ выполнено соотношение $U_{\xi(i_1,j_1,k)} \neq U_{\xi(i_2,j_2,k)}$.

Итак, пусть (i_1,j_1) и (i_2,j_2) — различные пары такие, что $\lambda(i_1,j_1) = \lambda(i_2,j_2)$. Если $\mathbb{S}_{(i_1,j_1)} = \mathbb{S}_{(i_2,j_2)}$, то в силу леммы 4.6.3, а если $\mathbb{S}_{(i_1,j_1)} \neq \mathbb{S}_{(i_2,j_2)}$, то в силу леммы 4.6.4 в группе σ_0 содержится нетождественная подстановка s_0 такая, что при всех (i,j) из дополнения $\mathbb{S}$ до $\mathbb{S}_{(i_1,j_1)} \cup \mathbb{S}_{(i_2,j_2)}$ выполнено равенство $s_0(i,j) = (i,j)$. Для подстановки s_0 в множестве X можно найти матрицу $\widehat{U}(s_0) = \|U_{ij}(s_0)\|_{q\times l}$ такую, что $s_0(\widehat{U}(s_0)) \neq \widehat{U}(s_0)$. Но это и означает, что при некотором k из $\{1,\ldots,z(i_1,j_1) = z(i_2,j_2)\}$ выполнено соотношение $U_{\xi(i_1,j_1,k)}(s_0) \neq U_{\xi(i_2,j_2,k)}(s_0)$, что и требуется.

Лемма доказана.

Леммы 4.6.2 и 4.6.5 решают поставленный в начале параграфа вопрос. Для удобства ссылок сформулируем этот результат в виде отдельного утверждения.

Лемма 4.6.6. Пусть $\varphi = (\mathbb{S}_{(1,1)},\ldots,\mathbb{S}_{(q,l)},\lambda)$ — допустимая функциональная сигнатура. Категория Φ является Γ-полной подкатегорией соответствующей симметрической категории Σ_φ тогда и только тогда, когда сигнатура φ удовлетворяет следующему условию

$$\underset{\mathbb{S}}{\forall}(i_1, j_1)\left(\left(\underset{\mathbb{S}}{\exists}(i_2, j_2)(\mathbb{S}_{(i_1,j_1)} \subset \mathbb{S}_{(i_2,j_2)})\right) \to \left(|\lambda^{-1}(\lambda(i_1, j_1))| = 1\right)\right), \qquad (4.6.7)$$

где $\lambda^{-1}(\lambda(i_1, j_1))$ — класс ядерной эквивалентности для отображения λ, содержащий (i_1, j_1), и $|\lambda^{-1}(\lambda(i_1, j_1))|$ — мощность (число элементов) этого класса.

Глава 5

Результаты для конкретных моделей алгоритмических операторов и семейств корректирующих операций

5.1 О методах исследования регулярности и полноты

Исследование семейств задач классификации и конструкций, предназначенных для их решения при наличии общих полученных выше результатов может проводиться в значительной степени стандартным образом. Конечно, специфика конкретных ситуаций при этом сохраняется, но выражается она прежде всего в технических различиях, возникающих при получении ответов на общий цикл вопросов. Рассмотрение этих вопросов и будет проведено в настоящем параграфе. В остальных же параграфах данной главы ответы на поставленные вопросы будут получены для наиболее известных и широко применяемых на практике моделей алгоритмических операторов и семейств корректирующих операций.

Обычно изучение семейства задач классификации начинается с определения вида информации об объектах и классах (вида описаний) и вида допустимых ответов на вопрос о принадлежности объектов классам. Таким образом оказываются определены множества допустимых начальных информаций $\mathfrak{I}$ и допустимых финальных информаций $\widetilde{\mathfrak{I}}$. Кроме того, фиксируется размерность задач, т.е. либо определяются конкретные значения q и l, либо одно или оба из этих чисел рассматриваются как свободные параметры задачи.

Далее определяется и фиксируется дополнительная к прецедентной информация, которая должна учитываться в решении. Предполагая, что эта информация имеет универсальный характер, получаем, что в этой ситуации оказывается определена категория, в рамках семейств морфизмов которой следует вести построение решения или решений.

Для практического использования категории, выражающей универсальные ограничения, прежде всего необходимо получение явных описаний баз этой категории. При этом отдельно должны быть описаны одноэлементные базы, поскольку такое описание является по сути дела описанием регулярных задач. При наличии описания баз «автоматически» возникают конкретные критерии полноты для моделей алгоритмических операторов и семейств корректирующих операций. Процесс формирования семейств отображений, предназначаемых для этих ролей, имеет существенно эвристический характер, так что наличие строгих критериев в этой ситуации особенно важно. Применение критериев полноты в большинстве случаев оказывается достаточно нетрудным. Это позволяет решать вопрос о минимальной достаточной сложности исследуемых эвристических семейств. Для решения вопроса такого рода формируется структура упрощенных подсемейств и отыскиваются минимальные (по теоретико-множественному включению) подсемейства, обладающие свойством полноты. Формирование структуры может проводиться путем последовательного отказа от использования параметров, сводящегося к фиксации каким-либо естественным способом их значений.

5.2 Некоторые частные критерии регулярности и полноты для задач классификации

Результаты этого параграфа имеют существенно иллюстративный и справочный характер.

Представим множество $\mathbb{S} = \{(1,1), \dots, (q,l)\}$ в виде матрицы

$$\widehat{T} = \left\| \begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & \dots & (1,l) \\ (2,1) & (2,2) & \dots & (2,l) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (q,1) & (q,2) & \dots & (q,l) \end{array} \right\|_{q \times l}$$

Симметрические универсальные ограничения и категории определяются подгруппами симметрической группы σ_0, состоящей из всех подстановок (взаимно однозначных отображений) множества $\mathbb{S}$ на себя. Ниже будут подробно рассмотрены кроме самой группы σ_0 еще две ее подгруппы — σ_i и σ_j (записи σ_i и σ_j рассматриваются как единые символы).

Группа σ_i состоит из всех подстановок множества $\mathbb{S}$, соответствующих подстановкам строк матрицы $\widehat{T}$, а группа σ_j — из подстановок, соответствующих подстановкам столбцов.

На практике часто встречаются функциональные универсальные ограничения, задаваемые функциональными сигнатурами φ_0, φ_i и φ_j.

Сигнатура φ_0 определяется одноэлементными множествами $\mathbb{S}_{(i,j)} = ((i,j))$ — для всех пар $(i,j) \in \mathbb{S}$ и функцией λ, принимающей при всех (i,j) из $\mathbb{S}$ значение 1.

Таким образом, морфизмами категории Φ_0 из $\mathfrak{C}_{q,l}^{p_1}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}^{p_2}(\mathfrak{V})$ при произвольных множествах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ и натуральных числах p_1 и p_2 являются все отображения u из $\mathfrak{C}_{q,l}^{p_1}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}^{p_2}(\mathfrak{V})$, представимые в виде

$$u\left(\left\|U_{ij}^1\right\|_{q\times l}, \dots, \left\|U_{ij}^{p_1}\right\|_{q\times l}\right) =$$
$$= \left(\left\|f^1(U_{ij}^1, \dots, U_{ij}^{p_1})\right\|_{q\times l}, \dots, \left\|f^{p_2}(U_{ij}^1, \dots, U_{ij}^{p_1})\right\|_{q\times l}\right),$$

где $f^1, \dots, f^{p_2}$ — функции из $\mathfrak{U}^{p_1}$ в $\mathfrak{V}$.

Сигнатура φ_i определяется множествами $\mathbb{S}_{(i,j)}$ такими, что при всех (i,j) из $\mathbb{S}$ множество $\mathbb{S}_{(i,j)}$ есть i-я строка матрицы $\widehat{T}$. Функция λ в данном случае определяется равенством $\lambda(i,j) = j$. Таким образом, морфизмами категории Φ_i из $\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V})$ при произвольных множествах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ и натуральных числах p_1 и p_2 являются все отображения u из $\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V})$, представимые в виде

$$u\left(\left\|U^1_{ij}\right\|_{q\times l}, \ldots, \left\|U^{p_1}_{ij}\right\|_{q\times l}\right) =$$
$$= \left(\left\|f^1_j(U^1_{i1}, \ldots, U^{p_1}_{il})\right\|^{ij}_{q\times l}, \ldots, \left\|f^{p_2}_j(U^1_{i1}, \ldots, U^{p_1}_{il})\right\|^{ij}_{q\times l}\right),$$

где $f^1_1, \ldots, f^1_l, \ldots, f^{p_2}_l$ — функции из $\mathfrak{U}^{lp_1}$ в $\mathfrak{V}$.

Сигнатура φ_j определяется множествами $\mathbb{S}_{(i,j)}$ такими, что при всех (i,j) из $\mathbb{S}$ множество $\mathbb{S}_{(i,j)}$ есть j-й столбец матрицы $\widehat{T}$. Функция λ в данном случае определяется равенством $\lambda(i,j) = i$. Таким образом, морфизмами категории Φ_j из $\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V})$ при произвольных множествах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ и натуральных числах p_1 и p_2 являются все отображения u из $\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V})$, представимые в виде

$$u\left(\left\|U^1_{ij}\right\|_{q\times l}, \ldots, \left\|U^{p_1}_{ij}\right\|_{q\times l}\right) =$$
$$= \left(\left\|f^1_i(U^1_{1j}, \ldots, U^{p_1}_{qj})\right\|^{ij}_{q\times l}, \ldots, \left\|f^{p_2}_i(U^1_{1j}, \ldots, U^{p_1}_{qj})\right\|^{ij}_{q\times l}\right),$$

где $f^1_1, \ldots, f^1_q, \ldots, f^{p_2}_q$ — функции из $\mathfrak{U}^{qp_1}$ в $\mathfrak{V}$.

Поскольку группа σ_j и сигнатура φ_j получаются из группы σ_i и сигнатуры σ_i «транспонированием», то результаты для них соответственно аналогичны.

Отметим, что из определения 4.5.1 вытекает, что имеют место равенства $\sigma_{\varphi_0} = \sigma_0$, $\sigma_{\varphi_i} = \sigma_i$ и $\sigma_{\varphi_j} = \sigma_j$. Непосредственная проверка показывает также, что сигнатуры φ_0, φ_i и φ_j допустимы и что они удовлетворяют условию (4.6.7), так что, применяя лемму 4.6.6, получаем

Лемма 5.2.1. Категории Φ_0, Φ_i и Φ_j являются Γ-полными подкатегориями категорий Σ_0, Σ_i и Σ_j соответственно.

Из этой леммы вытекает, например, что если для некоторой регулярной задачи, в которой универсальные ограничения выражены симметрической категорией Σ_0, в рамках этой категории построен корректный алгоритм, то такой алгоритм может быть построен и в рамках более узкой функциональной категории Φ_0.

Применяя результаты главы 4, получим теперь описания баз рассматриваемых категорий.

Лемма 5.2.2. Пусть $\mathfrak{U}$ — произвольное множество и X — подмножества пространства матриц $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$.

— Множество X является базой категорий Φ_0 и Σ_0 тогда и только тогда, когда для любых $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ из множества $\mathbb{S}$ в X содержится матрица $\|U_{ij}\|_{q\times l}$ такая, что $U_{i_1 j_1} \neq$ $\neq U_{i_2 j_2}$.

— Множество X является базой категорий Φ_i и Σ_i тогда и только тогда, когда для произвольных $i_1 \neq i_2$ из множества $\{1, \ldots, q\}$ в X содержится матрица $\|U_{ij}\|_{q\times l}$ такая, что при некотором j из $\{1, \ldots, l\}$ выполнено $U_{i_1 j} \neq U_{i_2 j}$.

— Множество X является базой категорий Φ_j и Σ_j тогда и только тогда, когда для произвольных $j_1 \neq j_2$ из множества $\{1, \ldots, l\}$ в X содержится матрица $\|U_{ij}\|_{q \times l}$ такая, что при некотором i из $\{1, \ldots, q\}$ выполнено $U_{ij_1} \neq U_{ij_2}$.

Пусть $X = \{\widehat{U}_0\}$ — одноэлементное подмножество пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$.

— Множество X является базой категорий Φ_0 и Σ_0 тогда и только тогда, когда все элементы матрицы $\widehat{U}_0$ попарно различны.

— Множество X является базой категорий Φ_i и Σ_i тогда и только тогда, когда все строки матрицы $\widehat{U}_0$ попарно различны.

— Множество X является базой категорий Φ_j и Σ_j тогда и только тогда, когда все столбцы матрицы $\widehat{U}_0$ попарно различны.

Доказательство данной леммы сводится к простой проверке.

Из леммы 5.2.2 и теоремы 3.3.3 (общего критерия регулярности) вытекает

Теорема 5.2.3. Пусть Z — задача классификации с матрицей информации $\widehat{I}$.

— Если универсальным ограничениям задачи Z соответствует категория Φ_0 или Σ_0, то задача Z регулярна тогда и только тогда, когда элементы матрицы $\widehat{I}$ попарно различны.

— Если универсальным ограничениям задачи Z соответствует категория Φ_i или Σ_i, то задача Z регулярна тогда и только тогда, когда строки матрицы $\widehat{I}$ попарно различны.

— Если универсальным ограничениям задачи Z соответствует категория Φ_j или Σ_j, то задача Z регулярна тогда и только тогда, когда столбцы матрицы $\widehat{I}$ попарно различны.

Следствие 5.2.4. Пусть Z — задача классификации со стандартной информацией и с матрицей информации $\widehat{I}$, где

$$\widehat{I} = \left\| \Big(D'_{(S^1,\ldots,S^m)}(S_i),\ D''(S^1), \ldots, D''(S^m),\ P_j(S^1), \ldots, P_j(S^m) \Big) \right\|_{q \times l}.$$

— Если универсальным ограничениям задачи Z соответствует категория Φ_0 или Σ_0, то задача Z регулярна тогда и только тогда, когда при всех $i_1 \neq i_2$ из $\{1, \ldots, q\}$ выполнено $D'_{(S^1,\ldots,S^m)}(S_{i_1}) \neq D'_{(S^1,\ldots,S^m)}(S_{i_2})$ и для любых $j_1 \neq j_2$ из $\{1, \ldots, l\}$ существует k в $\{1, \ldots, m\}$ такое, что $P_{j_1}(S^k) \neq P_{j_2}(S^k)$.

— Если универсальным ограничениям задачи Z соответствует категория Φ_i или Σ_i, то задача Z регулярна тогда и только тогда, когда при всех $i_1 \neq i_2$ из $\{1, \ldots, q\}$ выполнено $D'_{(S^1,\ldots,S^m)}(S_{i_1}) \neq D'_{(S^1,\ldots,S^m)}(S_{i_2})$.

— Если универсальным ограничениям задачи Z соответствует категория Φ_j или Σ_j, то задача Z регулярна тогда и только тогда, когда при всех $j_1 \neq j_2$ из $\{1, \ldots, l\}$ существует k в $\{1, \ldots, m\}$ такое, что $P_{j_1}(S^k) \neq P_{j_2}(S^k)$.

Описания баз рассматриваемых категорий позволяют сформулировать конкретные критерии полноты.

Теорема 5.2.5. Пусть $\mathfrak{M}$ — модель алгоритмов категории Φ_0 или Σ_0. Модель $\mathfrak{M}$ полна тогда и только тогда, когда для любой матрицы $\widehat{I}$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I})$ с попарно различными элементами выполнено равенство $\mathfrak{M}(\widehat{I}) = \mathfrak{C}_{q,l}(\widetilde{\mathfrak{I}})$.

— Если $\mathfrak{M}$ — модель алгоритмов категории Φ_i или Σ_i, то модель $\mathfrak{M}$ полна тогда и только тогда, когда для любой матрицы $\widehat{I}$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I})$ с попарно различными строками выполнено равенство $\mathfrak{M}(\widehat{I}) = \mathfrak{C}_{q,l}(\widetilde{\mathfrak{I}})$.

— Если $\mathfrak{M}$ — модель алгоритмов категории Φ_j или Σ_j, то модель $\mathfrak{M}$ полна тогда и только тогда, когда для любой матрицы $\widehat{I}$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I})$ с попарно различными столбцами выполнено равенство $\mathfrak{M}(\widehat{I}) = \mathfrak{C}_{q,l}(\widetilde{\mathfrak{I}})$.

Теорема 5.2.6. Пусть $\mathfrak{M}^0$ — модель алгоритмических операторов категории Φ_0 или Σ_0. Модель $\mathfrak{M}^0$ полна тогда и только тогда, когда для любой матрицы $\widehat{I}$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I})$ с попарно различными элементами в множестве $\mathfrak{M}^0(\widehat{I})$ для любых $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ из множества $\mathbb{S}$ найдется матрица $\widehat{R} = \|R_{ij}\|_{q\times l}$ такая, что $R_{i_1j_1} \neq R_{i_2j_2}$.

— Если $\mathfrak{M}^0$ — модель категории Φ_i или Σ_i, то модель $\mathfrak{M}^0$ полна тогда и только тогда, когда для любой матрицы $\widehat{I}$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I})$ с попарно различными строками в множестве $\mathfrak{M}^0(\widehat{I})$ для любых $i_1 \neq i_2$ из $\{1, \ldots, q\}$ найдется матрица $\widehat{R}$, в которой будут различны i_1-я и i_2-я строки.

— Если $\mathfrak{M}^0$ — модель категории Φ_j или Σ_j, то модель $\mathfrak{M}^0$ полна тогда и только тогда, когда для любой матрицы $\widehat{I}$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I})$ с попарно различными столбцами в множестве $\mathfrak{M}^0(\widehat{I})$ для любых $j_1 \neq j_2$ из $\{1, \ldots, l\}$ найдется матрица‘$\widehat{R}$, в которой будут различны j_1-й и j_2-й столбцы.

Сформулируем, наконец, результаты для семейств корректирующих операций.

Теорема 5.2.7. Пусть $\mathfrak{F}$ — семейство корректирующих операций категории Φ_0 или Σ_0. Семейство $\mathfrak{F}$ полно тогда и только тогда, когда для любого множества матриц X такого, что при любых $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ из $\mathbb{S}$ в X имеется матрица $\widehat{R} = \|R_{ij}\|_{q\times l}$ с $R_{i_1j_1} \neq R_{i_2j_2}$, выполнено равенство $\mathfrak{F}(X) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{R})$.

— Если $\mathfrak{F}$ — семейство корректирующих операций категории Φ_i или‘Σ_i, то семейство $\mathfrak{F}$ полно тогда и только тогда, когда для любого множества матриц X такого, что при любых $i_1 \neq i_2$ из $\{1, \ldots, q\}$ в X имеется матрица $\widehat{R}$ с различными i_1-й и i_2-й строками, выполнено равенство $\mathfrak{F}(X) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{R})$.

— Если $\mathfrak{F}$ — семейство корректирующих операций категории Φ_j или Σ_j, то семейство $\mathfrak{F}$ полно тогда и только тогда, когда для любого множества матриц X такого, что при любых $j_1 \neq j_2$ из $\{1, \ldots, l\}$ в X имеется матрица $\widehat{R}$ с различными j_1-м и j_2-м столбцами, выполнено равенство $\mathfrak{F}(X) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{R})$.

5.3 Полнота R-моделей алгоритмических операторов

Определим прежде всего семейство $\mathfrak{Z}_R$ задач классификации, для решения которых предназначаются алгоритмические операторы из R-моделей. Эти задачи определяются стандартным способом формирования информации, причем

1. $\mathfrak{S} = \mathbb{R}^n$, т.е. объектами являются числовые векторы;

2. $D'_{(S^1,\ldots,S^m)}(S) \equiv S$ и $D''(S) \equiv S$, так что описаниями объектов и классов оказываются векторы вида
$$(S, S^1, \ldots, S^m, P(S^1), \ldots, P(S^m)).$$

Итак, для задачи Z из $\mathfrak{Z}_R$ матрица информации $\widehat{I}$ выглядит следующим образом:

$$\widehat{I} = \left\| \left(S_i, S^1, \ldots, S^m,\ P_j(S^1), \ldots, P_j(S^m)\right) \right\|_{q \times l}^{ij}.$$

Применяя результаты предыдущего параграфа, находим:

— если универсальным ограничениям соответствует категория Φ_0 или Σ_0, то для регулярности задачи из семейства $\mathfrak{Z}_R$ необходимо и достаточно, чтобы для любых различных j_1 и j_2 из $\{1, \ldots, l\}$ в $\{1, \ldots, m\}$ имелся индекс k такой, что $P_{j_1}(S^k) \neq P_{j_2}(S^k)$ (это вытекает из того, что при $i_1 \neq i_2$, $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, q\}$ всегда в данном случае выполнено соотношение $D'_{(S^1,\ldots,S^m)}(S_{i_1}) \neq D'_{(S^1,\ldots,S^m)}(S_{i_2})$);

— если универсальным ограничениям соответствует категория Φ_i или Σ_i, то задача из семейства $\mathfrak{Z}_R$ регулярна;

— если универсальным ограничениям соответствует категория Φ_j или Σ_j, то для регулярности задачи из семейства $\mathfrak{Z}_R$ необходимо и достаточно, чтобы для любых различных j_1 и j_2 из $\{1, \ldots, l\}$ в $\{1, \ldots, m\}$ имелся индекс k такой, что $P_{j_1}(S^k) \neq P_{j_2}(S^k)$ (здесь имеет место случай, когда переход к, вообще говоря, существенно более широким категориям не приводит к расширению семейства регулярных задач по сравнению со случаем Φ_0 и Σ_0).

Для решения задач из множества $\mathfrak{Z}_R$ в [54, 57] и др. работах были предложены модели алгоритмических операторов $\mathfrak{M}(R_j, \bar{\gamma}^m)$ и $\mathfrak{M}(R, \bar{\gamma}^m)$. Опишем модель $\mathfrak{M}(R_j, \bar{\gamma}^m)$ (решение вопроса о полноте для модели $\mathfrak{M}(R, \bar{\gamma}^m)$ вытекает из проводимого ниже рассмотрения подмоделей модели $\mathfrak{M}(R_j, \bar{\gamma}^m)$).

Алгоритмические операторы модели $\mathfrak{M}(R_j, \bar{\gamma}^m)$ определяются выбором кусочно-линейных гиперповерхностей R_j в пространстве $\mathbb{R}^n$ (при $j \in \{1, \ldots, l\}$), определяемых соотношениями $r_j(x) = 0$ (x — точка из $\mathbb{R}^n$), где r_j — кусочно-линейные функции, и набором действительных параметров γ_k (где $k \in \{1, \ldots, m\}$).

Для задачи Z из семейства $\mathfrak{Z}_R$ оператором B из модели $\mathfrak{M}(R_j, \bar{\gamma}^m)$ матрица оценок $\|R_{ij}\|_{q \times l}$ формируется следующим образом:

1. гиперповерхностям R_j сопоставляются предикаты Pr_j, т.е. функции Pr_j из $\mathbb{R}^n$ в $\{0, 1\}$, так, что при всех x из $\mathbb{R}^n$ выполняется тождество $Pr_j(x) \equiv (r_j(x) \geqslant 0)$;

2. для каждого j из $\{1, \ldots, l\}$ множество обучающих объектов $\{S^1, \ldots, S^m\}$ разбивается на четыре подмножества S_j^{00}, S_j^{01}, S_j^{10} и S_j^{11} так, что при $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$
$$S_j^{\alpha\beta} = \left\{ S \;\middle|\; S \in \{S^1, \ldots, S^m\},\ Pr_j(S) = \alpha, Pr_j(S) = \beta \right\};$$

3. для всех $j \in \{1, \ldots, l\}$ и $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$ вычисляются величины $Q_j^{\alpha\beta}$:
$$Q_j^{\alpha\beta} = \sum_{k : S^k \in S_j^{\alpha\beta}} \gamma_k;$$

4. для всех $i \in \{1, \ldots, q\}$ и $j \in \{1, \ldots, l\}$ вычисляются оценки R_{ij}:
$$R_{ij} = \begin{cases} \frac{Q_j^{00} + Q_j^{11}}{1 + Q_j^{01} + Q_j^{10}} & \text{при } Pr_j(S_i) = 1, \\ \frac{Q_j^{01} + Q_j^{10}}{1 + Q_j^{00} + Q_j^{11}} & \text{при } Pr_j(S_i) = 0. \end{cases} \tag{5.3.1}$$

Ниже будет рассматриваться структура подмоделей модели $\mathfrak{M}(R_j, \bar{\gamma}^m)$, возникающих при наложении ограничений на выбор значений параметров. А именно, будут рассматриваться модели

1. $\mathfrak{M}(R_j)$ — $\gamma_k \equiv 1$ при $k \in \{1, \dots, m\}$;
2. $\mathfrak{M}(L_j, \bar{\gamma}^m)$ — в качестве гиперповерхностей R_j допускается использование только гиперплоскостей;
3. $\mathfrak{M}(R, \bar{\gamma}^m)$ — в модели $\mathfrak{M}(R_j, \bar{\gamma}^m)$ — $R_j \equiv R$ при всех $j \in \{1, \dots, l\}$;
4. $\mathfrak{M}(L_j)$ — в модели $\mathfrak{M}(L_j, \bar{\gamma}^m)$ — $\gamma_k \equiv 1$ при всех $k \in \{1, \dots, m\}$;
5. $\mathfrak{M}(R)$ — в модели $\mathfrak{M}(R, \bar{\gamma}^m)$ — $\gamma_k \equiv 1$ при всех $k \in \{1, \dots, m\}$;
6. $\mathfrak{M}(L, \bar{\gamma}^m)$ — в модели $\mathfrak{M}(L_j, \bar{\gamma}^m)$ — $L_j \equiv L$ при всех $j \in \{1, \dots, l\}$;
7. $\mathfrak{M}(L)$ — в модели $\mathfrak{M}(L, \bar{\gamma}^m)$ — $\gamma_k \equiv 1$ при всех $k \in \{1, \dots, m\}$.

Непосредственно из описания вытекает, что исходная модель $\mathfrak{M}(R_j, \bar{\gamma}^m)$ является моделью категории Φ_i. Моделями этой категории оказываются, конечно, и все ее подмодели. Но кроме того модель $\mathfrak{M}(R, \bar{\gamma}^m)$ и ее подмодели являются моделями более узкой категории Φ_0. В силу этого будет рассматриваться вопрос о полноте модели $\mathfrak{M}(R, \bar{\gamma}^m)$ и ее подмоделей в категории Φ_0, а остальных моделей — в категории Φ_i.

Теорема 5.3.1. Модели $\mathfrak{M}(L, \bar{\gamma}^m)$ и $\mathfrak{M}(R)$ полны.

Доказательство. Пусть Z — регулярная задача из семейства $\mathfrak{Z}_R$ и универсальным ограничениям Z соответствует категория Φ_0. Это означает, что при любых $j_1 \neq j_2$ из множества $\{1, \dots, l\}$ в множестве $\{1, \dots, m\}$ имеется индекс k такой, что $P_{j_1}(S^k) \neq P_{j_2}(S^k)$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что в таком случае при любых различных парах (i_1, j_1) и (i_2, j_2) из $\mathbb{S}$ в исследуемых моделях существуют операторы B такие, что в порождаемых ими для задачи Z матрицах оценок $\|R_{ij}\|_{q \times l}$ выполнено $R_{i_1 j_1} \neq R_{i_2 j_2}$.

Случай 1. Модель $\mathfrak{M}(L, \bar{\gamma}^m)$.

1.1. Пусть $j_1 \neq j_2$.

Из предположения о задаче Z вытекает, что в множестве $\{1, \dots, m\}$ имеется k_0 такое, что $P_{j_1}(S^{k_0}) \neq P_{j_2}(S^{k_0})$.

Определим оператор B_1 из модели $\mathfrak{M}(L, \bar{\gamma}^m)$ параметрами $\gamma_{k_0} = 1$ и $\gamma_k = (2m-2)^{-1}$ при $k \in \{1, \dots, m\}$ и $k \neq k_0$ и гиперплоскостью L_1 такой, что для соответствующего предиката Pl_1 выполнены равенства $Pl_1(S_{i_1}) = Pl_1(S_{i_2}) = Pl_1(S^{k_0}) = 1$.

Для оценок $R_{i_1 j_1}$ и $R_{i_2 j_2}$, порождаемых оператором B_1, из соотношения (5.3.1) при $P_{j_1}(S^{k_0}) = 1$ имеем

$$R_{i_1 j_1} \geqslant 1/((m-1)/(2m-2)+1) = 2/3$$

и

$$R_{i_2 j_2} \leqslant ((m-1)/(2m-2))/(1+1) = 1/4,$$

так что $R_{i_1j_1} \neq R_{i_2j_2}$, а при $P_{j_1}(S^{k_0}) = 0$ получаем аналогично $R_{i_1j_1} \leqslant 1/4$ и $R_{i_2j_2} \geqslant 2/3$, т.е. снова выполнено соотношение $R_{i_1j_1} \neq R_{i_2j_2}$

1.2. Пусть $j_1 = j_2$ и $i_1 \neq i_2$.

Определим оператор B_2 из модели $\mathfrak{M}(L, \bar{\gamma}^m)$ параметрами $\gamma_1 = 1$ и $\gamma_k = (2m-2)^{-1}$ при $k \in \{2, 3, \ldots, m\}$ и гиперплоскостью L_2 такой, что для соответствующего предиката Pl_2 выполнены равенства $Pl_2(S_{i_1}) = Pl_2(S^1) = 1$ и $Pl_2(S_{i_2}) = 0$.

При $P_{j_1}(S^1) = 1$ имеем $R_{i_1j_1} \geqslant 2/3$ и $R_{i_2j_2} \leqslant 1/4$, а при $P_{j_1} = 0$ — $R_{i_1j_1} \leqslant 1/4$ и $R_{i_2j_2} \geqslant 2/3$, так что в обоих случаях $R_{i_1j_1} \neq R_{i_2j_2}$.

Итак, при $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ в модели $\mathfrak{M}(L, \bar{\gamma}^m)$ имеется оператор B, для оценок, порождаемых которым, выполнено $R_{i_1j_1} \neq R_{i_2j_2}$, так что модель $\mathfrak{M}(L, \bar{\gamma}^m)$ полна.

Случай 2. Модель $\mathfrak{M}(R)$.

2.1. Пусть $j_1 \neq j_2$.

Определим оператор B_1 из модели $\mathfrak{M}(R)$ кусочно-линейной гиперповерхностью R_1 такой, что для соответствующего предиката Pr_1 выполнены соотношения $Pr_1(S^k) = P_{j_1}(S^k)$ и $Pr_1(S_{i_1}) = Pr_1(S_{i_2}) = 1$ при $k \in \{1, \ldots, m\}$.

Используя предположение о задаче Z и условие (5.3.1), получаем $R_{i_1j_1} = m$ и $R_{i_2j_2} \leqslant$ $\leqslant m - 1$, т.е. при данном выборе значений параметров $R_{i_1j_1} \neq R_{i_2j_2}$.

2.2. Пусть $j_1 = j_2$ и $i_1 \neq i_2$.

Определим оператор B_2 из модели $\mathfrak{M}(R)$ кусочно-линейной гиперповерхностью R_2 такой, что для соответствующего предиката Pr_2 выполнены соотношения $Pr_2(S_{i_1}) = 1$, $Pr_2(S_{i_2}) = 0$ и $Pr_2(S^k) = P_{j_1}(S^k)$ при $k \in \{1, \ldots, m\}$.

Используя предположение о задаче Z и условие (5.3.1), получаем $R_{i_1j_1} = m$ и $R_{i_2j_2} = 0$, т.е. снова при данном выборе значений параметров $R_{i_1j_1} \neq R_{i_2j_2}$.

Итак, и модель $\mathfrak{M}(R)$ полна.

Теорема доказана.

Следствие 5.3.2. Модель $\mathfrak{M}(R, \bar{\gamma}^m)$ полна.

Доказательство. Модель $\mathfrak{M}(R, \bar{\gamma}^m)$ является надмоделью полных моделей $\mathfrak{M}(L, \bar{\gamma}^m)$ и $\mathfrak{M}(R)$.

Теорема 5.3.3. Модели $\mathfrak{M}(L_j, \bar{\gamma}^m)$ и $\mathfrak{M}(R_j)$ полны.

Доказательство. Пусть Z — регулярная задача из семейства $\mathfrak{Z}_R$ и универсальным ограничениям Z соответствует категория Φ_i. Для доказательства теоремы достаточно показать, что при любых различных i_1 и i_2 из $\{1, \ldots, q\}$ в исследуемых моделях существуют операторы B такие, что в порождаемых ими для задачи Z матрицах оценок i_1-я и i_2-я строки различны.

Случай 1. Модель $\mathfrak{M}(L_j, \bar{\gamma}^m)$.

Определим оператор B из модели $\mathfrak{M}(L_j, \bar{\gamma}^m)$ гиперплоскостью L_1 такой, что для соответствующего ей предиката Pl выполнены равенства $Pl(S_{i_1}) = 1$ и $Pl(S_{i_2}) = 0$. Параметры γ определим так: $\gamma_1 = 1$ и $\gamma_k = (2m-2)^{-1}$ при $k \in \{2, 3, \ldots, m\}$. Остальные гиперплоскости $L_2, \ldots, L_l$ выберем произвольно.

Аналогично случаю 1 доказательства предыдущей теоремы, из соотношения (5.3.1) получаем $R_{i_11} \neq R_{i_21}$, что гарантирует различность строк с номерами i_1 и i_2.

Случай 2. Модель $\mathfrak{M}(R_j)$.

Определим оператор B из модели $\mathfrak{M}(R_j)$ кусочно-линейными гиперповерхностями $R_1, \ldots, R_l$ такими, что для соответствующего R_1 предиката Pr_1 выполнено $Pr_1(S_{i_1}) = 1$, $Pr_1(S_{i_2}) = 0$ и $Pr_1(S^k) = P_1(S^k)$ при $k \in \{1, \ldots, m\}$. Гиперповерхности $R_2, R_3, \ldots, R_l$ произвольны.

Как и в случае 2 доказательства предыдущей теоремы, получаем $R_{i_1 1} = m$ и $R_{i_2 1} = 0$, так что $R_{i_1 1} \neq R_{i_2 1}$.

Теорема доказана.

Следствие 5.3.4. Модель $\mathfrak{M}(R_j, \bar{\gamma}^m)$ полна.

Доказательство. Модель $\mathfrak{M}(R_j, \bar{\gamma}^m)$ является надмоделью полных моделей $\mathfrak{M}(L_j, \bar{\gamma}^m)$ и $\mathfrak{M}(R_j)$.

Отметим, что модели $\mathfrak{M}(L)$ и $\mathfrak{M}(L_j)$ не обладают свойством полноты. Действительно, рассмотрим задачу Z_0: $l = 1$, $m = 2$, $q = 2$, $P_1(S^1) = P_1(S^2) = 1$, точки S^1, S_1, S_2 и S^2 лежат на одной прямой в пространстве $\mathbb{R}^n$, причем точки S_1 и S_2 расположены между точками S^1 и S^2. Очевидно, что Z_0 — регулярная задача и в случае, когда универсальным ограничениям соответствует категория Φ_0, и в случае, когда им отвечает Σ_0. В то же время, непосредственно проверяется, что при любом выборе операторов из данных моделей оказывается выполненым равенство $R_{11} = R_{21}$.

5.4 Полнота П-моделей алгоритмических операторов

Определим семейство $\mathfrak{Z}_\Pi$ задач классификации, для решения которых предназначаются алгоритмические операторы из П-моделей. Эти задачи определяются стандартным способом формирования информации, причем

1. $\mathfrak{S}$ — множество, на декартовом квадрате которого определен функционал ρ, т.е. определена функция ρ: $\mathfrak{S}^2 \to \mathbb{R}$;

2. $D'_{(S^1,\ldots,S^m)}(S) = (\rho(S, S^1), \ldots, \rho(S, S^m))$, т.е. описания объектов контроля — векторы значений основного функционала;

3. $\mathfrak{I}_2 = \varnothing$, т.е. описания объектов обучения в явном виде не используются.

Итак, для задачи Z из $\mathfrak{Z}_\Pi$ матрица информации $\widehat{I}$ выглядит следующим образом:

$$\widehat{I} = \left\| \left(\rho(S_i, S^1), \ldots, \rho(S_i, S^m),\ P_j(S^1), \ldots, P_j(S^m) \right) \right\|_{q \times l}^{ij}.$$

Применяя результаты предыдущих параграфов, находим, что

— если универсальным ограничениям соответствует категория Φ_0 или Σ_0, то для регулярности задачи из семейства $\mathfrak{Z}_\Pi$ необходимо и достаточно, чтобы для любых различных i_1 и i_2 из $\{1, \ldots, q\}$ в $\{1, \ldots, m\}$ имелся индекс k такой, что $\rho(S_{i_1}, S^k) \neq \rho(S_{i_2}, S^k)$, и чтобы для любых различных j_1 и j_2 из $\{1, \ldots, l\}$ в $\{1, \ldots, m\}$ имелся индекс k такой, что $P_{j_1}(S^k) \neq P_{j_2}(S^k)$;

— если универсальным ограничениям соответствует категория Φ_i или Σ_i, то для регулярности задачи из семейства $\mathfrak{Z}_\Pi$ необходимо и достаточно, чтобы для любых различных i_1 и i_2 из $\{1,\ldots,q\}$ в $\{1,\ldots,m\}$ имелся индекс k такой, что $\rho(S_{i_1},S^k)\neq\rho(S_{i_2},S^k)$;

- если универсальным ограничениям соответствует категория Φ_j или Σ_j, то для регулярности задачи из семейства $\mathfrak{Z}_\Pi$ необходимо и достаточно, чтобы для любых различных j_1 и j_2 из $\{1,\ldots,l\}$ в $\{1,\ldots,m\}$ имелся индекс k такой, что $P_{j_1}(S^k)\neq P_{j_2}(S^k)$.

Теперь будет рассмотрена модель $\mathfrak{M}_\Pi$ алгоритмических операторов, предназначенных для решения задач из описанного семейства $\mathfrak{Z}_\Pi$. Операторы этой модели задаются выбором ml действительных параметров γ_k^j, где $j\in\{1,\ldots,l\}$ и $k\in\{1,\ldots,m\}$. Для задачи Z из семейства $\mathfrak{Z}_\Pi$ оператор B формирует матрицу оценок $\|R_{ij}\|_{q\times l}$, где

$$R_{ij}=\sum_{k=0}^{m}\gamma_k^j\rho(S_i,S^k). \tag{5.4.1}$$

Очевидно, что операторы модели $\mathfrak{M}_\Pi$ являются морфизмами категории Φ_i, так что и вопрос о полноте решается для нее в рамках этой категории.

Теорема 5.4.1. Модель $\mathfrak{M}_\Pi$ полна.

Доказательство. Пусть Z — регулярная задача из семейства $\mathfrak{Z}_\Pi$, универсальным ограничениям которой соответствует категория Φ_i. Для доказательства теоремы достаточно показать, что для произвольных различных i_1 и i_2 из множества $\{1,\ldots,q\}$ в модели $\mathfrak{M}_\Pi$ найдется оператор B такой, что в порождаемой им для рассматриваемой задачи матрице оценок строки с номерами i_1 и i_2 будут различны.

Итак, пусть $i_1\neq i_2$, где $i_1,i_2\in\{1,\ldots,q\}$. Из предположения о регулярности вытекает, что в множестве индексов $\{1,\ldots,m\}$ найдется k_0 такое, что для него будет выполнено соотношение $\rho(S_{i_1},S^{k_0})\neq\rho(S_{i_2},S^{k_0})$.

Определим оператор B из модели $\mathfrak{M}_\Pi$ параметрами $\gamma_k^j=1$ и $\gamma_k^j=0$ при $j\in\{1,\ldots,l\}$ и $k\in\{1,\ldots,m\}$, $k\neq k_0$.

Из определения модели $\mathfrak{M}_\Pi$ при всех $j\in\{1,\ldots,l\}$ получаем $R_{i_1j}=\rho(S_{i_1},S^{k_0})\neq$ $\neq\rho(S_{i_2},S^{k_0})=R_{i_2j}$, но это и означает, что строки с номерами i_1 и i_2 различны.

Теорема доказана.

5.5 Полнота Г-моделей алгоритмических операторов

Модели алгоритмических операторов вычисления оценок (Г-модели) предназначены для решения задач классификации из семейства $\mathfrak{Z}_\Gamma$. Описание этого семейства и будет нашей ближайшей целью.

Задачи из семейства $\mathfrak{Z}_\Gamma$ определяются стандартным способом формирования информации, причем:

1. $\mathfrak{S}$ — подмножество декартова произведения $\mathcal{M}_1\times\mathcal{M}_2\times\ldots\mathcal{M}_n$, где $\mathcal{M}_t$ при $t\in$ $\in\{1,\ldots,n\}$ — пространства с введенными на них полуметриками, т.е. функциями ρ_t: $\mathcal{M}_t^2\to\mathbb{R}_+$ такими, что для всех $(x,y)\in\mathcal{M}_t^2$ выполнено $(\rho_t(x,y)=0)\equiv(x=y)$;

2. $D'_{(S^1,\dots,S^m)}(S) = \left\|\rho_t(S, S^k)\right\|^{kt}_{m\times n}$;

3. $\mathfrak{I}_2 = \varnothing$, т.е. описаниями классов K являются векторы вида $(P(S^1), \dots, P(S^m))$.

Для задач из множества $\mathfrak{Z}_\Gamma$ вопрос об условиях регулярности для стандартно рассматриваемых в настоящей главе случаев решается следующим образом:

— если универсальным ограничениям соответствует категория Φ_0 или Σ_0, то для регулярности задачи из семейства $\mathfrak{Z}_\Gamma$ необходимо и достаточно, чтобы для любых различных i_1 и i_2 из $\{1, \dots, q\}$ в $\{1, \dots, m\}$ и в $\{1, \dots, n\}$ имелись индексы k_0 и t_0 такие, что $\rho_{t_0}(S_{i_1}, S^{k_0}) \neq \rho_{t_0}(S_{i_2}, S^{k_0})$, и чтобы для любых различных j_1 и j_2 из $\{1, \dots, l\}$ в $\{1, \dots, m\}$ имелся индекс k_0 такой, что $P_{j_1}(S^{k_0}) \neq P_{j_2}(S^{k_0})$;

— если универсальным ограничениям соответствует категория Φ_i или Σ_i, то для регулярности задачи из семейства $\mathfrak{Z}_\Gamma$ необходимо и достаточно, чтобы для любых различных i_1 и i_2 из $\{1, \dots, q\}$ в $\{1, \dots, m\}$ и в $\{1, \dots, n\}$ имелись индексы k_0 и t_0 такие, что $\rho_{t_0}(S_{i_1}, S^{k_0}) \neq \rho_{t_0}(S_{i_2}, S^{k_0})$;

— если универсальным ограничениям соответствует категория Φ_j или Σ_j, то для регулярности задачи из семейства $\mathfrak{Z}_\Gamma$ необходимо и достаточно, чтобы для любых различных j_1 и j_2 из $\{1, \dots, l\}$ в $\{1, \dots, m\}$ имелся индекс k_0 такой, что $P_{j_1}(S^{k_0}) \neq P_{j_2}(S^{k_0})$.

Для решения задач из множества $\mathfrak{Z}_\Gamma$ используются алгоритмические операторы вычисления оценок, описание семейства которых будет нашей ближайшей целью. Отметим, что основные данные о семействе взяты из [54].

Алгоритмические операторы вычисления оценок задаются:

1. выбором системы $\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}$ так называемых опорных множеств, т.е. непустых подмножеств множества $\{1, \dots, n\}$;

2. выбором функции близости, т.е. отображения из произведения множества всех подмножеств множества $\{1, \dots, n\}$ на $\mathbb{R}^n_+$ в $\{0, 1\}$;

3. выбором значений числовых (неотрицательных) параметров γ_k $(k \in \{1, \dots, m\})$, p_r $(r \in \{1, \dots, N\})$, ε_t $(t \in \{1, \dots, m\})$, x_0 и x_1.

В настоящей работе будет рассматриваться модель алгоритмических операторов вычисления оценок с фиксированной общей системой опорных множеств $\{\Omega^0_1, \dots, \Omega^0_N\}$ такой, что для нее выполнено равенство

$$\cup_{r=1}^N \Omega^0_r = \{1, \dots, n\}.$$

Кроме того будем считать, что используются функции близости из параметрического семейства $\{b_{\bar\varepsilon}\}$, где $\bar\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_1 > 0, \dots, \varepsilon_n > 0$, содержащего функции вида

$$b_{\bar\varepsilon}(\Omega, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{cases} 1 & \text{если } \underset{\Omega}{\forall}\, t(\alpha_t \leqslant \varepsilon_t), \\ 0 & \text{если } \underset{\Omega}{\exists}\, t(\alpha > \varepsilon), \end{cases}$$

где $\Omega \subseteq \{1, \dots, n\}$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$.

Оценка R_{ij} при $i \in \{1, \dots, q\}$ и $j \in \{1, \dots, l\}$ определяется равенством

$$R_{ij} = x_1 \Gamma_j^1(S_i) + x_0 \Gamma_j^0(S_i), \tag{5.5.1}$$

где

$$\Gamma_j^\alpha(S_i) = \sum_{k: P_j(S^k)=\alpha} \sum_{r=1}^{N} \gamma_k p_r b_{\bar{\varepsilon}}^\alpha(*)$$

при $\alpha \in \{0, 1\}$, $k \in \{1, \dots, m\}$, $b_{\bar{\varepsilon}}^\alpha(1) = b_{\bar{\varepsilon}}^\alpha(*)$ и $b_{\bar{\varepsilon}}^\alpha(0) = 1 - b_{\bar{\varepsilon}}^\alpha(*)$; звездочка здесь и далее обозначает стандартный набор аргументов функций близости, т.е.

$$(*) = \left(\Omega_r^0, \rho_1(S_i, S^k), \dots, \rho_n(S_i, S^k)\right).$$

Итак, алгоритмические операторы вычисления оценок опреляются параметрами $\bar{\gamma}$, $\bar{p}$, $\bar{\varepsilon}$, x_0 и x_1. Модель таких операторов будет обозначаться символом $\mathfrak{M}(\bar{\gamma}, \bar{p}, \bar{\varepsilon}, \bar{x})$.

Отметим, что все операторы рассматриваемой модели являются мофизмами категории Φ_0, в рамках которой ниже и будет проведено исследование вопроса о полноте. При этом помимо самой модели $\mathfrak{M}(\bar{\gamma}, \bar{p}, \bar{\varepsilon}, \bar{x})$ предметом рассмотрения будут и ее подмодели, возникающие при отказе от использования параметров $\bar{\gamma}$, $\bar{p}$, $\bar{\varepsilon}$ и (или) $\bar{x}$. Иначе говоря, будут рассмотрены модели $\mathfrak{M}(\bar{p}, \bar{\varepsilon}, \bar{x})$ (в исходной модели $\gamma_k \equiv 1$ при $k \in \{1, \dots, m\}$), $\mathfrak{M}(\bar{\gamma}, \bar{\varepsilon}, \bar{x})$ (в исходной модели $p_r \equiv 1$ при $r \in \{1, \dots, N\}$), $\mathfrak{M}(\bar{\gamma}, \bar{p}, \bar{x})$ (в исходной модели $\varepsilon_t \equiv \text{const}$ при $t \in \{1, \dots, n\}$) и $\mathfrak{M}(\bar{\gamma}, \bar{p}, \bar{\varepsilon})$ (в исходной модели $x_0 = 1$ и $x_1 = 1$) и т.д.

Поскольку свойство полноты моделей монотонно относительно теоретико-множественного включения, то поставленные вопросы для модели $\mathfrak{M}(\bar{\gamma}, \bar{p}, \bar{\varepsilon}, \bar{x})$ и ее рассматриваемых в настоящей работе подмоделей полностью решаются следующим утверждением:

Теорема 5.5.1. Модель $\mathfrak{M}(\bar{\gamma}, \bar{\varepsilon})$ полна, а $\mathfrak{M}(\bar{\gamma}, \bar{p}, \bar{x})$ и $\mathfrak{M}(\bar{p}, \bar{\varepsilon}, \bar{x})$ не полны.

Доказательство.

1. Модель $\mathfrak{M}(\bar{\gamma}, \bar{\varepsilon})$.

Для данной модели из формулы (5.5.1), полагая в ней $p_r \equiv 1$ при $r \in \{1, \dots, N\}$ и $x_0 = x_1 = 1$, получаем формулу для оценок

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \left(\sum r = 1^N b_{\bar{\varepsilon}}^{P_j(S^k)}(*) \right). \tag{5.5.2}$$

Для доказательства полноты модели $\mathfrak{M}(\bar{\gamma}, \bar{\varepsilon})$ достаточно показать, что при любых различных парах (i_1, j_1) и (i_2, j_2) из $\mathbb{S} = \{(1, 1), \dots, (q, l)\}$ и при любой регулярной задаче Z в модели $\mathfrak{M}(\bar{\gamma}, \bar{\varepsilon})$ найдется оператор B такой, что в порождаемой им для Z матрице оценок $\|R_{ij}\|_{q \times l}$ будет выполнено соотношение $R_{i_1 j_1} \neq R_{i_2 j_2}$ (теорема 5.2.6).

Итак, пусть Z — регулярная задача из класса $\mathfrak{Z}_\Gamma$.

а). Пусть $j_1 \neq j_2$.

Поскольку задача Z регулярна, то в множестве индексов $\{1, \dots, m\}$ найдется k_0, при котором $P_{j_1}(S^{k_0}) \neq P_{j_2}(S^{k_0})$. Для определенности будем считать, что $P_{j_1}(S^{k_0}) = 1$ и, соответственно $P_{j_2}(S^{k_0}) = 0$

Определим оператор B_1 в рамках модели $\mathfrak{M}(\bar{\gamma}, \bar{\varepsilon})$ следующими значениями параметров: $\gamma_{k_0} = 1$ и $\gamma_k = (mN)^{-1}$ при $k \in \{1, \ldots, m\}$ и $k \neq k_0$; $\varepsilon_t = \max \rho_t(S_i, S^k)$ при $t \in \in \{1, \ldots, n\}$, где максимум берется по $i \in \{1, \ldots, q\}$ и $k \in \{1, \ldots, m\}$.

Для оценок $R_{i_1 j_1}$ и $R_{i_2 j_2}$, порождаемых оператором B_2 для задачи Z, имеем

$$R_{i_1 j_1} = N + \sum_{k=1, k\neq k_0}^{m} \gamma_k \sum_{r=1}^{N} b_{\bar{\varepsilon}}^{P_{j_1}(S^k)}(*) \geqslant N$$

и

$$R_{i_2 j_2} \leqslant N - 1 + \sum_{k=1, k\neq k_0}^{m} \gamma_k \sum_{r=1}^{N} b_{\bar{\varepsilon}}^{P_{j_2}(S^k)}(*) < N.$$

Итак, в этом случае $R_{i_1 j_1} \neq R_{i_2 j_2}$, что и требовалось.

б). Пусть теперь $j_1 = j_2$ и $i_1 \neq i_2$.

Из предположения о регулярности задачи Z вытекает, что в множествах $\{1, \ldots, m\}$ и $\{1, \ldots, n\}$ имеются индексы k_0 и t_0 соответственно такие, что для них $\rho_{t_0}(S_{i_1}, S^{k_0}) \neq \neq \rho_{t_0}(S_{i_2}, S^{k_0})$. Положим, что $\rho_{t_0}(S_{i_1}, S^{k_0}) < \rho_{t_0}(S_{i_2}, S^{k_0})$ и $P_{j_1}(S^{k_0}) \neq P_{j_2}(S^{k_0})$.

Оператор B_2 определим в рамках модели $\mathfrak{M}(\bar{\gamma}, \bar{\varepsilon})$ параметрами $\gamma_{k_0} = 1$, $\gamma_k = (mN)^{-1}$ при $k \in \{1, \ldots, m\}$, $k \neq k_0$, $\varepsilon_{t_0} = (1/2)(\rho_{t_0}(S_{i_1}, S^{k_0}) + \rho_{t_0}(S_{i_2}, S^{k_0}))$ и при $t \in \{1, \ldots, n\}, t \neq \neq t_0$ пусть $\varepsilon_t = \max \rho_t(S_i, S^k)$ при $t \in \{1, \ldots, n\}$, $t \neq t_0$, где максимум берется по всем $i \in \{1, \ldots, q\}$ и $k \in \{1, \ldots, m\}$.

Для оценок $R_{i_1 j_1}$ и $R_{i_2 j_2}$, порождаемых оператором B_2 для задачи Z, имеем

$$R_{i_1 j_1} = N + \sum_{k=1, k\neq k_0}^{m} \gamma_k \sum_{r=1}^{N} b_{\bar{\varepsilon}}^{P_{j_1}(S^k)}(*) \geqslant N$$

и

$$R_{i_2 j_2} \leqslant N - 1 + \sum_{k=1, k\neq k_0}^{m} \gamma_k \sum_{r=1}^{N} b_{\bar{\varepsilon}}^{P_{j_2}(S^k)}(*) < N.$$

Итак, и в этом случае $R_{i_1 j_1} \neq R_{i_2 j_2}$, что и требовалось.

Полнота модели $\mathfrak{M}(\bar{\gamma}, \bar{\varepsilon})$ доказана.

Отметим, что поскольку модели $\mathfrak{M}(\bar{\gamma}, \bar{p}, \bar{\varepsilon})$, $\mathfrak{M}(\bar{\gamma}, \bar{\varepsilon}, \bar{x})$ и $\mathfrak{M}(\bar{\gamma}, \bar{p}, \bar{\varepsilon}, \bar{x})$ являются надмоделями модели $\mathfrak{M}(\bar{\gamma}, \bar{\varepsilon})$, то из доказанного вытекает и их полнота.

2. Модель $\mathfrak{M}(\bar{\gamma}, \bar{p}, \bar{x})$.

Пусть Z — регулярная задача из множества $\mathfrak{Z}_\Gamma$ такая, что при всех $t \in \{1, \ldots, n\}$, $k \in \{1, \ldots, m\}$ и $i \in \{1, \ldots, q\}$ выполнено условие $\rho_t(S_i, S^k) < \varepsilon_t$. Тогда при всех i_1 и i_2 из $\{1, \ldots, q\}$ и всех j_1 и j_2 из $\{1, \ldots, l\}$ выполнено равенство $R_{i_1 j_1} = R_{i_2 j_2}$, что и означает неполноту рассматриваемой модели.

3. Модель $\mathfrak{M}(\bar{p}, \bar{\varepsilon}, \bar{x})$.

Построим контрпример: $l = 2$, $m = 2$, $q = 1$, $n = 1$, $\rho_1(S_1, S^1) = \rho_1(S_1, S^2) = a$, $P_1(S^1) = P_2(S^2) = 1$, $P_1(S^2) = P_2(S^1) = 0$. Для всех значений p_1, ε_1, x_0 и x_1 имеем

$$R_{11} = x_1 p_1 b_{\bar{\varepsilon}}^{1}(\{1\}, a) + x_0 p_1 b_{\bar{\varepsilon}}^{0}(\{1\}, a) = R_{12}.$$

Построенная задача регулярна, однако все операторы из модели $\mathfrak{M}(\bar{p}, \bar{\varepsilon}, \bar{x})$ порождают для нее оценки $R_{11} = R_{12}$, что и означает неполноту модели $\mathfrak{M}(\bar{p}, \bar{\varepsilon}, \bar{x})$.

Теорема доказана.

5.6 Полнота полиномиальных семейств корректирующих операций

В настоящем параграфе будет решен вопрос о полноте наиболее часто используемых семейств корректирующих операций — семейств $\mathfrak{A}^n$, содержащих операторы, представимые в виде многочленов от действительных матриц с умножением по Адамару ($\|a_{ij}\|_{q\times l} \times \|b_{ij}\|_{q\times l} = \|c_{ij}\|_{q\times l}$, где $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$ при всех $i \in \{1, \dots, q\}$ и $j \in \{1, \dots, l\}$) и со степенью, не превосходящей n. Операторы из $\mathfrak{A}^n$ при всех n являются морфизмами категории Φ_0, что и предопределяет необходимость решения вопроса о полноте в рамках именно этой категории на базе теоремы 5.2.7.

Предварительно мы докажем лемму, которая будет использована и в следующем параграфе.

Лемма 5.6.1. Пусть X — база категории Φ_0 в пространстве действительных $q \times l$-матриц $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathbb{R})$, т.е. пусть для произвольных различных (i_1, j_1) и (i_2, j_2) из множества пар $\mathbb{S}$ в X содержится матрица $\|R_{ij}\|_{q\times l}$, в которой $R_{i_1j_1} \neq R_{i_2j_2}$. Тогда в линейной оболочке $L(X)$ множества X содержится матрица $\widehat{R}^0$ с попарно различными элементами.

Доказательство. Определим функционалы D: $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ и d: $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ равенствами

$$D\left(\|R_{ij}\|_{q\times l}\right) = \max |R_{i_1j_1} - R_{i_2j_2}|$$

и

$$d\left(\|R_{ij}\|_{q\times l}\right) = \min |R_{i_1j_1} - R_{i_2j_2}|,$$

где $\|R_{ij}\|_{q\times l}$ — произвольная матрица из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathbb{R})$, а максимум и минимум берутся по всем парам (i, j) с $R_{i_1j_1} \neq R_{i_2j_2}$. Определим теперь отображение G из $\mathfrak{C}^2_{q,l}(\mathbb{R})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathbb{R})$ равенством

$$G(\widehat{R}^1, \widehat{R}^2) = \frac{1}{d(\widehat{R}^1)}\widehat{R}^1 + \frac{1}{2D(\widehat{R}^2)}\widehat{R}^2.$$

(случай, когда $R_{ij} \equiv R$ при всех $(i, j) \in \mathbb{S}$ для дальнейшего интереса не представляет).

Пусть X — подмножество пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathbb{R})$, удовлетворяющее условию леммы, и $\widehat{R}^1, \dots, \widehat{R}^k$ — минимальный (по числу матриц) набор элементов из X такой, что и для множества $\{\widehat{R}^1, \dots, \widehat{R}^k\}$ условие леммы выполнено (легко видеть, что $k \leqslant ql - 1$). Определим матрицу $\widehat{R}^0$ равенством

$$\widehat{R}^0 = G(\widehat{R}^k, G(\widehat{R}^{k-1}, \dots, G(\widehat{R}^2, \widehat{R}^1)\dots)).$$

Все элементы матрицы $\widehat{R}^0$ попарно различны. Действительно, если в матрице $\widehat{R}^1 = \left\|R^1_{ij}\right\|_{q\times l}$ различны, скажем, $R^1_{i_1j_1}$ и $R^1_{i_2j_2}$, то при любой матрице $\widehat{R}^2 = \left\|R^2_{ij}\right\|_{q\times l}$ в матрице

$G(\widehat{R}^1, \widehat{R}^2) = \|R_{ij}\|_{q\times l}$ элементы $R_{i_1j_1}$ и $R_{i_2j_2}$ также будут различны, поскольку при $R^2_{i_1j_1} \neq$ $\neq R^2_{i_2j_2}$

$$\frac{1}{d(\widehat{R}^2)}|R^2_{i_1j_1} - R^2_{i_2j_2}| \geqslant 1$$

и

$$\frac{1}{2D(\widehat{R}^1)}|R^1_{i_1j_1} - R^1_{i_2j_2}| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Аналогично устанавливается, что если $R^2_{i_1j_1}$ и $R^2_{i_2j_2}$ различны, то $R_{i_1j_1}$ и $R_{i_2j_2}$ различны при произвольной матрице $\widehat{R}^1$ и в $G(\widehat{R}^2, \widehat{R}^1) = \|R_{ij}\|_{q\times l}$.

Лемма доказана.

Теорема 5.6.2. Семейство корректирующих операций $\mathfrak{A}^{ql-1}$ полно. Семейство корректирующих операций $\mathfrak{A}^{ql-2}$ не полно.

Доказательство. Пусть X — база категории Φ_0 в пространстве действительных $q \times l$-матриц $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathbb{R})$, т.е. пусть для произвольных различных (i_1, j_1) и (i_2, j_2) из множества $\mathbb{S}$ в X содержится матрица $\|R_{ij}\|_{q\times l}$, в которой $R_{i_1j_1} \neq R_{i_2j_2}$. В силу леммы 5.6.1 в линейной оболочке $L(X)$ множества X в этом случае имеется матрица $\widehat{R}^0 = \left\|R^0_{ij}\right\|_{q\times l}$ с попарно различными элементами.

Пусть $\widehat{R} = \|R_{ij}\|_{q\times l}$ — произвольная матрица из пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathbb{R})$. Для нее существует полином P (интерполяционный полином Лагранжа) степени не выше $ql - 1$ такой, что при всех $(i, j) \in \mathbb{S}$ выполнено равенство $P(R^0_{ij}) = R_{ij}$. Соответствующий этому полиному оператор из семейства $\mathfrak{A}^{ql-1}$ переводит матрицу $\widehat{R}^0$ в выбранную матрицу $\widehat{R}$, что в силу произвольности выбора последней и означает полноту семейства $\mathfrak{A}^{ql-1}$.

Для доказательства неполноты семейства $\mathfrak{A}^{ql-2}$ рассмотрим пример: X — одноэлементное множество, состоящее из единственной матрицы с попарно различными элементами.

Теорема доказана.

5.7 О неполиномиальных полных семействах корректирующих операций

В работе [54] рассматривалось семейство корректирующих операций LM^n, построенных на базе линейных операций и оператора *Max*: $Max\left(\|R_{ij}\|_{q\times l}\right) = \|R'_{ij}\|_{q\times l}$, где $R'_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда R_{ij} — максимальный элемент матрицы $\|R_{ij}\|_{q\times l}$, а в остальных случаях $R'_{ij} = 0$. В операторы из LM^n оператор *Max* входит не более n раз.

Отметим, что оператор *Max* является морфизмом категории Σ_0, но не категории Φ_0, так что вопрос о полноте для LM^n должен решаться в рамках Σ_0.

Теорема 5.7.1. Семейство корректирующих операций LM^n полно при $n \geqslant](ql-1)/2[$ и неполно при $n <](ql-1)/2[$.

Доказательство. Пусть X — база категории Σ_0 в пространстве действительных $q \times$ $\times\, l$-матриц $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathbb{R})$. В силу леммы 5.6.1 в линейной оболочке множества X в этом случае имеется матрица $\widehat{R}^0$ с попарно различными элементами. В матрицах $Max(\widehat{R}^0)$ и $Max(-\widehat{R}^0)$ содержится ровно по одной единице, причем в $Max(\widehat{R}^0)$ она стоит на месте максимального в $\widehat{R}^0$ элемента, а в $Max(-\widehat{R}^0)$ — на месте минимального. Вычитая из $\widehat{R}^0$ матрицу $Max(\widehat{R}^0)$, умноженную на достаточно большое положительное число, получаем матрицу $\widehat{R}^1$, в которой на месте максимального в $\widehat{R}^0$ элемента будет находиться минимальный элемент; аналогичным образом с помощью $Max(-\widehat{R}^0)$ получим матрицу $\widehat{R}^{1-}$. Повторяя этот процесс и применяя оператор Max, получаем линейный базис пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathbb{R})$ — набор матриц

$$\Big(\widehat{R}^0, Max(\widehat{R}^0), Max(-\widehat{R}^0), Max(\widehat{R}^1), Max(\widehat{R}^{1-}), Max(\widehat{R}^2), \ldots\Big).$$

Для доказательства неполноты семейства LM^n при $n <](ql-1)/2[$, как и в доказательстве теоремы 5.6.2, достаточно рассмотреть пример: X — одноэлементное множество, состоящее из единственной матрицы с попарно различными элементами.

Теорема доказана.

Глава 6

Дополнительные результаты для задач классификации и общих задач преобразования информации

6.1 О степенях полиномиальных расширений специальных моделей алгоритмических операторов

В настоящем параграфе будет рассматриваться случай, когда в качестве оценок используются действительные числа, что не будет оговариваться дополнительно.

Естественной мерой сложности рассмотренных в предыдущей главе семейств корректирующих операций $\mathfrak{A}^n$ и LM^n является параметр n. Ниже будет показано, что за счет предъявления более жестких, чем просто требование полноты, требований к моделям алгоритмических операторов можно понизить необходимые значения этих параметров ($ql-1$ и $](ql-1)/2[$ соответственно).

Определение 6.1.1. Пусть $\mathfrak{M}^0$ — модель алгоритмических операторов категории Φ_0 или Σ_0. Модель $\mathfrak{M}^0$ называется $0,1$-*полной*, если для любой регулярной задачи Z с матрицей информации $\widehat{I}$ при любых $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ из множества $\mathbb{S}$ в пересечении $\mathfrak{M}^0(\widehat{I}) \cap$ $\cap\, \mathfrak{C}_{q,l}(\{0, 1\})$ имеется хотя бы одна матрица $\|R_{ij}\|_{q\times l}$ с $R_{i_1 j_1} \neq R_{i_2 j_2}$.

Таким образом, $0,1$-полнота модели означает, что для любой регулярной задачи операторами модели порождается не просто произвольная база категории, выражающей универсальные ограничения, но база, состоящая исключительно из $0,1$-матриц. В качестве примера покажем, что таким свойством обладает один из вариантов семейства операторов вычисления оценок.

Теорема 6.1.1. Модель алгоритмических операторов вычисления оценок $\mathfrak{M}(\bar{\gamma}, \bar{\varepsilon})$, у всех операторов которой используется единственное опорное множество $\Omega_0 = \{1, \ldots, n\}$, является $0,1$-полной в категории Φ_0.

Доказательство. Пусть Z — регулярная задача, определенная наборами допустимых объектов $(S^1, \ldots, S^m)$ (обучение) и $(S_1, \ldots, S_q)$ (контроль) и соответствующими наборами булевых векторов $(\bar{\alpha}(S^1), \ldots, \bar{\alpha}(S^m))$ и $(\bar{\alpha}(S_1), \ldots, \bar{\alpha}(S_q))$.

Определенный параметрами $\bar{\gamma}$ и $\bar{\varepsilon}$ оператор B из рассматриваемой модели порождает для задачи Z матрицу оценок $\|R_{ij}\|_{q\times l}$, где при всех $(i,j) \in \mathbb{S}$

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k b_{\bar{\varepsilon}}^{\alpha_j(S^k)}(\rho_1(S_i, S^k), \ldots, \rho_n(S_i, S^k)),$$

$$b_{\bar{\varepsilon}}(\rho_1(S_i, S^k), \ldots, \rho_n(S_i, S^k)) = \begin{cases} 1, & \text{если } \rho_t(S_i, S^k) \leqslant \varepsilon_t \text{ при всех } t \in \{1, \ldots, n\}; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Покажем, что при любых $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ можно так выбрать параметры $\bar{\gamma}$ и $\bar{\varepsilon}$, что соответствующий оператор B из $\mathfrak{M}(\bar{\gamma}, \bar{\varepsilon})$ будет для задачи Z порождать матрицу оценок $\|R_{ij}\|_{q\times l}$, принадлежащую $\mathfrak{C}_{q,l}(\{0,1\})$ и такую, что $R_{i_1j_1} \neq R_{i_2j_2}$. Итак, пусть $(i_1, j_1) \neq$ $\neq (i_2, j_2)$.

а). Пусть $j_1 \neq j_2$.

Поскольку задача Z регулярна, в множестве $\{1, \ldots, m\}$ имеется индекс k_0 такой, что $\alpha_{j_1}(S^{k_0}) \neq \alpha_{j_2}(S^{k_0})$. Определим оператор B_1 параметрами $\gamma_{k_0} = 1$, $\gamma_k = 0$ при $k \neq k_0$, $k \in \{1, \ldots, m\}$ и для всех $t \in \{1, \ldots, n\}$ выберем ε_t так, чтобы было выполнено равенство $\varepsilon_t = \max \rho_t(S_i, S^k)$, где максимум берется по всем $i \in \{1, \ldots, q\}$ и $k \in \{1, \ldots, m\}$.

Оператор B_1 удовлетворяет требуемым условиям.

б). Пусть теперь $j_1 = j_2$ и $i_1 \neq i_2$.

Из предположения о регулярности задачи Z снова вытекает, что можно выбрать t_0 и k_0 так, что при этих значениях $\rho_{t_0}(S_{i_1}, S^{k_0}) \neq \rho_{t_0}(S_{i_2}, S^{k_0})$. Положим для определенности, что $\rho_{t_0}(S_{i_1}, S^{k_0}) \neq \rho_{t_0}(S_{i_2}, S^{k_0})$, и выберем для оператора B_2 значения параметров $\bar{\gamma}$ и $\bar{\varepsilon}$ следующим образом: $\gamma_{k_0} = 1$, $\gamma_k = 0$ при $k \neq k_0$, $k \in \{1, \ldots, m\}$ и $\varepsilon_{t_0} = (1/2)(\rho_{t_0}(S_{i_1}, S^{k_0}) +$ $+ \rho_{t_0}(S_{i_2}, S^{k_0}))$, и при всех $t \neq t_0$, $t \in \{1, \ldots, m\}$ — $\varepsilon_t = \max \rho_t(S_i, S^k)$, где максимум берется по всем $i \in \{1, \ldots, q\}$ и $k \in \{1, \ldots, m\}$.

Оператор B_2 — искомый.

Теорема доказана.

Перейдем теперь к рассмотрению семейств корректирующих операций.

Определение 6.1.2. Пусть $\mathfrak{F}$ — семейство корректирующих операций категории Φ_0 или Σ_0. Семейство $\mathfrak{F}$ называется $0,1$-*полным*, если для любого множества $0,1$-матриц X такого, что при любых $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ из множества пар $\mathbb{S}$ в X имеется матрица $\widehat{R} =$ $= \|R_{ij}\|_{q\times l}$ с $R_{i_1j_1} \neq R_{i_2j_2}$, выполнено равенство $\mathfrak{F}(X) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathbb{R})$.

Для произвольной $0,1$-матрицы $\widehat{R} = \|R_{ij}\|_{q\times l}$ положим $Ind(\widehat{R}) = \{(i,j) | R_{ij} = 1\}$, $\widehat{E}^1 = \|E_{ij}\|_{q\times l}$, где при всех (i,j) выполнено $E_{ij} = 1$, $\widehat{R}^- = \widehat{E}^1 - \widehat{R}$. Для множества X $0,1$-матриц положим $X^* = \{\widehat{R} | (\widehat{R} \in X) \vee (\widehat{R}^- \in X)\}$.

Лемма 6.1.2. Пусть X — некоторое множество $0,1$-матриц такое, что при любых различных (i_1, j_1) и (i_2, j_2) из множества $\mathbb{S}$ в X имеется матрица $\widehat{R} = \|R_{ij}\|_{q\times l}$ с $R_{i_1j_1} \neq R_{i_2j_2}$. Пусть также N — неодноэлементное подмножество множества $\mathbb{S}$. Тогда в множестве X^* содержится по меньшей мере одна матрица $\widehat{R}^0$ такая, что

$$1 \leqslant |Ind(\widehat{R}^0) \cap N| \leqslant |N|/2. \tag{6.1.1}$$

Доказательство. Пусть $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$, $(i_1, j_1) \in N$ и $(i_2, j_2) \in N$. По условию в множестве X имеется матрица $\widehat{R} = \|R_{ij}\|_{q\times l}$ с $R_{i_1j_1} \neq R_{i_2j_2}$. Очевидно, что для $\widehat{R}$ и $\widehat{R}^-$ выполнены неравенства $|Ind(\widehat{R}) \cap N| \geqslant 1$ и $|Ind(\widehat{R}^-) \cap N| \geqslant 1$. Поскольку всегда имеет место равенство $|Ind(\widehat{R}) \cap N| + |Ind(\widehat{R}^-) \cap N| = |N|$, то для $\widehat{R}$ или для $\widehat{R}^-$ выполнены неравенства (6.1.1).

Лемма доказана.

Теорема 6.1.3. Семейство $\mathfrak{A}^{[log_2ql]}$ является $0,1$-полным семейством корректирующих операций. Граница степени $[log_2ql]$ точна.

Доказательство. Для того, чтобы доказать полноту семейства $\mathfrak{A}^{[log_2ql]}$ опишем процесс построения в рамках множества $\mathfrak{A}^{[log_2ql]}(X)$ линейного базиса пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathbb{R})$, считая, что X — множество матриц, удовлетворяющее условию определения 6.1.2. Положим $N = \mathbb{S} = \{(1,1), \ldots, (q,l)\}$ и выберем в X^* (отметим при этом, что $X^* \subseteq \mathfrak{A}^1(X)$) матрицу $\widehat{R}^1$, удовлетворяющую условию (6.1.1), что возможно в силу леммы 6.1.2. Теперь положим $N = Ind(\widehat{R}^1)$ и, если $|N| > 1$, снова выберем в X матрицу $\widehat{R}^2$, удовлетворяющую тому же условию (6.1.1). Рассмотрим произведение $\widehat{R}^1\widehat{R}^2$. Легко видеть, что выполнено $|Ind(\widehat{R}^1\widehat{R}^2)| \leqslant ql/4$. Полагая $N = Ind(\widehat{R}^1\widehat{R}^2)$, выберем в X матрицу $\widehat{R}^3$ и т.д.

Поскольку на k-м шаге построения $|N| \leqslant ql/2^k$, то не более, чем за $[log_2ql]$ шагов будет построено произведение $P^1 = \widehat{R}^1\widehat{R}^2 \ldots \widehat{R}^k$ с $|Ind(\widehat{P}^1)| = 1$, т.е. будет построена $0,1$-матрица $\widehat{P}^1 = \left\|P^1_{ij}\right\|_{q\times l}$, содержащая единственный ненулевой элемент, скажем — P^1_{ij}.

Положим теперь $N = \mathbb{S} - \{(i_1, j_1)\}$ и снова выполним описанный цикл. Будет получено произведение $\widehat{P}^2 = \left\|P^2_{ij}\right\|_{q\times l}$, в котором снова будет иметься единственный ненулевой элемент, скажем — P^2_{ij}.

Положим теперь $N = \mathbb{S} - \{(i_1, j_1), (i_2, j_2)\}$ и построим матрицу $\widehat{P}^3$ и т.д.

Очевидно, что в результате будет построен линейный базис пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathbb{R})$, что и требовалось.

Покажем теперь, что степень $[log_2ql]$ не может быть уменьшена, т.е. что эта граница для степени точна.

Не ограничивая общности, будем считать, что $ql = 2^p$.

Положим, что X — такое множество $0,1$-матриц, что для X выполнено условие леммы 6.1.2 и $|X| = p$, т.е. $X = \{\widehat{R}^1, \ldots, \widehat{R}^p\}$ (отметим, что p — минимальная возможная мощность множества X).

Легко видеть, что при всех $k \in \{1, \ldots, p\}$ выполнены равенства $\widehat{R}^k\widehat{R}^k = \widehat{R}^k$, т.е. что на X умножение идемпотентно. Отсюда следует, что семейство матриц $\mathfrak{A}^n(X)$ при любом $n \geqslant p$ оказывается линейной оболочкой 2^p-элементного множества $0,1$-матриц

$$\{\widehat{E}^1, \widehat{R}^1, \ldots, \widehat{R}^p, \widehat{R}^1\widehat{R}^2, \ldots, \widehat{R}^{p-1}\widehat{R}^p, \ldots, \widehat{R}^1\widehat{R}^2 \ldots \widehat{R}^p\},$$

так что степень p не может быть уменьшена, поскольку должно быть выполнено равенство $\mathfrak{A}^n(X) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathbb{R})$.

Теорема доказана.

Замечание. Пример, доказывающий неуменьшаемость степени $[log_2 ql]$ для полиномиальных расширений семейства алгоритмов вычисления оценок, был первоначально построен в [119].

Теорема 6.1.4. Семейство LM^1 является $0,1$-полным семейством корректирующих операций в категории Σ_0.

Доказательство. Положим, что $X = \{\widehat{R}^1, \ldots, \widehat{R}^p\}$ — набор $0,1$-матриц, удовлетворяющий условию из определения 6.1.2, и (i_0, j_0) — произвольный элемент множества $\mathbb{S}$. Построим сумму $\widehat{R}^{(i_0,j_0)} = \widehat{P}^1 + \widehat{P}^2 + \ldots + \widehat{P}^p$, где при всех k из множества $\{1, \ldots, p\}$ при $R^k_{i_0 j_0} = 1$ матрица $\widehat{P}^k$ есть $\widehat{R}^k$, а при $R^k_{i_0 j_0} = 0$ — $\widehat{P}^k = \widehat{R}^{k-}$. Легко видеть, что в матрице $\widehat{R}^{(i_0,j_0)} = \left\|R^{(i_0,j_0)}_{ij}\right\|_{q\times l}$ выполнены соотношения $R^{(i_0,j_0)}_{i_0 j_0} = p$ и $R^{(i_0,j_0)}_{ij} \leqslant p - 1$ при $(i,j) \in \mathbb{S}$, $(i,j) \neq (i_0, j_0)$. Поэтому, применяя однократно оператор *Max*, получаем, что в матрице $Max(\widehat{R}^{(i_0,j_0)}) = \|R_{ij}\|_{q\times l}$ имеется единственный ненулевой элемент — $R_{i_0 j_0}$. Поскольку пара (i_0, j_0) выбрана произвольно, то в $LM^1(X)$ содержится линейный базис векторного пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathbb{R})$, а потому имеет место искомое равенство $LM^1(X) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathbb{R})$.

Теорема доказана.

Отметим, что если $\mathfrak{M}^0$ — некоторая $0,1$-полная модель алгоритмических операторов и $\mathfrak{F}$ — $0,1$-полное семейство корректирующих операций, то для любой регулярной задачи Z с матрицей информации $\widehat{I}$ с небходимостью будет выполнено равенство $\mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0(\widehat{I})) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathbb{R})$. Отсюда следует, что при любом корректном семействе $\mathfrak{M}^1$ решающих правил соответствующей категории семейство суперпозиций (алгоритмов) $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}[\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0]$ будет полным в обычном смысле.

6.2 Соотношение регулярности и разрешимости задач классификации с симметрическими и функциональными универсальными ограничениями

В предыдущих главах в соответствии с принятой в алгебраической теории распознавания точкой зрения в основном рассматривался вопрос о регулярности задач классификации. Как уже говорилось, регулярность задачи влечет ее разрешимость, а обратное, вообще говоря, неверно. Для задач с симметрическими и функциональными универсальными ограничениями в предыдущих главах были получены критерии регулярности. Нашей ближайшей целью будет получение критерия разрешимости. Этот критерий для простоты обозначений устанавливается в теореме 6.2.1 для задач с универсальными ограничениями, выражаемыми категориями Φ_0 или Σ_0, причем дополнительно предполагается, что $|\mathfrak{I}| \geqslant ql$.

По отношению к семействам отображений (алгоритмов) на базе требования разрешимости всех регулярных задач определяется свойство полноты. Рассматривая требование разрешимости в рамках семейства всех разрешимых задач, можно аналогичным образом определить свойство, которое мы назовем суперполнотой. Ясно, что каждое суперполное семейство является полным. В теореме 6.2.2 будет установлено, что для семейств категории Φ_0 верно и обратное, т.е. каждое полное семейство оказывается и суперполным. Для семейств же категории Σ_0 аналогичное утверждение неверно. Этот факт будет установлен в теореме 6.2.3.

Теорема 6.2.1. Пусть Z — задача классификации с универсальными ограничениями, выражаемыми категорией Φ_0 или Σ_0, определенная парой матриц $(\|I_{ij}\|_{q\times l}, \left\|\widetilde{I}_{ij}\right\|_{q\times l})$. Задача Z разрешима тогда и только тогда, когда для любых различных пар (i_1, j_1) и (i_2, j_2) из $\mathbb{S}$ справедлива импликация

$$(\widetilde{I}_{i_1j_1} \neq \widetilde{I}_{i_2j_2}) \to (I_{i_1j_1} \neq I_{i_2j_2}). \tag{6.2.1}$$

Доказательство.

1. Пусть универсальные ограничения задачи Z выражены категорией Φ_0, $\|I_{ij}\|_{q\times l}$ — информационная матрица задачи Z и для любых $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ из $\mathbb{S}$ выполнено условие (6.2.1). Определим функцию f из $\mathfrak{I}$ в $\widetilde{\mathfrak{I}}$ следующим образом:

$$f(I) = \begin{cases} \widetilde{I}_{ij}, & \text{если } I = I_{ij} \text{ при некоторой паре } (i,j) \text{ из множества } \mathbb{S}; \\ \widetilde{I}_{11} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В силу сделанного предположения функция f определена корректно. Кроме того, легко видеть, что для определяемого этой функцией морфизма u категории Φ_0 справедливо равенство $u(\|I_{ij}\|_{q\times l}) = \left\|\widetilde{I}_{ij}\right\|_{q\times l}$, т.е. u является решением.

2. Пусть теперь универсальные ограничения задачи Z выражены категорией Σ_0, а остальное — как в п.1. Тогда отображение f, построенное в п.1 оказвается решением, поскольку категория Φ_0 есть подкатегория категории Σ_0.

3. Пусть Z — задача из п.2, но для определяющей ее пары матриц не выполнена импликация (6.2.1). Это означает, что существуют различные пары (i_1, j_1) и (i_2, j_2) в $\mathbb{S}$ такие, что для них $\widetilde{I}_{i_1j_1} \neq \widetilde{I}_{i_2j_2}$ и $I_{i_1j_1} = I_{i_2j_2}$.

Допустим, что задача Z все же имеет решение — морфизм u категории Φ_0 такой, что $u(\|I_{ij}\|_{q\times l}) = \left\|\widetilde{I}_{ij}\right\|_{q\times l}$.

Пусть s_0 — подстановка из σ_0, определяемая равенствами $s_0(i_1, j_1) = (i_2, j_2)$, $s_0(i_2, j_2) = = (i_1, j_1)$ и при всех остальных (i,j) — $s_0(i,j) = (i,j)$. Легко видеть, что $s_0(\widehat{I}) = \widehat{I}$, но $s_0(\widehat{\widetilde{I}}) \neq \widehat{\widetilde{I}}$.

Поскольку отображение u, как морфизм категории Σ_0, должно коммутировать с подстановкой s_0, получаем противоречие с последним соотношением:

$$\widehat{\widetilde{I}} = u(\widehat{I}) = u(s_0(\widehat{I})) = s_0(u(\widehat{I})) = s_0(\widehat{\widetilde{I}}).$$

Итак, задача Z неразрешима.

4. Пусть, наконец, Z — задача с универсальными ограничениями, выраженными категорией Φ_0, и пусть для определяющих ее матриц не выполнено условие (6.2.1). Если бы

задача Z была разрешима, то она была бы разрешима и как задача с универсальными ограничениями, выраженными категорией Σ_0, что противоречит доказанному в п.3.

Теорема доказана.

Теорема 6.2.2. Пусть $\mathfrak{M}$ — семейство морфизмов (модель алгоритмов) категории Φ_0. Семейство $\mathfrak{M}$ полно тогда и только тогда, когда оно суперполно.

Доказательство. Поскольку любое суперполное семейство полно, то требуется показать только, что из полноты в данном случае вытекает суперполнота. Итак, пусть $\mathfrak{M}$ — полное семейство и Z — разрешимая задача с универсальными ограничениями, выраженными категорией Φ_0, и определенная парой матриц $(\widehat{I}, \widehat{\widehat{I}})$.

Символом $M(\widehat{U})$ для матрицы $\widehat{U} = \|U_{ij}\|_{q\times l}$ будет обозначаться множество $\{U_{11}, U_{12}, \ldots, U_{ql}\}$.

В силу общего предположения о том, что в множестве $\mathfrak{I}$ содержится не менее ql элементов, по матрице $\widehat{I}$ можно построить матрицу $\widehat{I}'$ с попарно различными элементами такую, что

а) $M(\widehat{I}) \subseteq M(\widehat{I}')$;

б) если $I'_{ij} \in M(\widehat{I})$, то $I'_{ij} = I_{ij}$.

Действительно, матрицу $\widehat{I}$ можно преобразовать в $\widehat{I}'$ следующим образом: просматривая в произвольном порядке элементы $\widehat{I}$ и, встречая некоторый элемент повторно, заменяем его на произвольный не входящий в $M(\widehat{I})$ и ранее не использованный элемент множества $\mathfrak{I}$.

В силу предположения о полноте семейства $\mathfrak{M}$ и того, что $\widehat{I}'$ является одноэлементной базой категории Φ_0, выполнено равенство $\mathfrak{M}(\widehat{I}') = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I})$. Отсюда вытекает, что в $\mathfrak{M}$ имеется морфизм A такой, что $A(\widehat{I}') = \widehat{\widehat{I}}$. Очевидно, что в таком случае выполнено и равенство $A(\widehat{I}) = \widehat{\widehat{I}}$, так что задача Z разрешима в рамках семейства $\mathfrak{M}$.

В силу произвольности выбора задачи Z из сказанного вытекает суперполнота семества $\mathfrak{M}$, что и требовалось.

Теорема доказана.

Теорема 6.2.3. Существуют полные, но не суперполные семейства морфизмов (модели алгоритмов) категории Σ_0.

Доказательство. Пусть Z — разрешимая, но не регулярная задача с универсальными ограничениями, выраженными категорией Σ_0. Пусть, кроме того, для информационной матрицы $\left\|\widetilde{I}_{ij}\right\|_{q\times l}$ задачи Z выполнено условие $\widetilde{I}_{i_1 j_1} \neq \widetilde{I}_{i_2 j_2}$.

Рассмотрим произвольную полную модель $\mathfrak{M}$ алгоритмов категории Σ_0.

Определим морфизм u^* категории Σ_0 из пространства матриц информации $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I})$ в себя равенством

$$u^*(\widehat{I}) = \begin{cases} \widehat{I}, & \text{если все элементы матрицы } \widehat{I} \text{ попарно различны;} \\ \widehat{I}^0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\widehat{I}$ — произвольная матрица из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I})$ и $\widehat{I}^0$ — произвольная зафиксированная матрица из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I})$ с попарно равными элементами.

Построим по модели $\mathfrak{M}$ модель $\mathfrak{M}^*$ — семейство суперпозиций вида $\{A \circ u^* | A \in \mathfrak{M}\}$.

Поскольку отображение u^* переводит информационные матрицы всех регулярных задач в себя, для регулярных задач из существования решений в рамках $\mathfrak{M}$ будет вытекать существование решений и в рамках $\mathfrak{M}^*$. В то же время для задачи Z (а равно и для любой разрешимой не регулярной задачи, у которой не все элементы информационной матрицы попарно равны) множество $\mathfrak{M}^*(\widehat{I})$ будет состоять только из матриц с попарно равными элементами, а потому $\widehat{\widehat{I}} \notin \mathfrak{M}^*(\widehat{I})$, т.е. задача Z в рамках семейства $\mathfrak{M}^*$ не будет разрешима. Итак, модель $\mathfrak{M}$ полна, но не суперполна, что и требовалось.

Теорема доказана.

6.3 Универсальные ограничения для задач с непересекающимися классами

В настоящем параграфе будут рассмотрены задачи классификации, универсальные ограничения в которых выражают следующую информацию:

1. данные о всех объектах однородны и независимы;

2. данные о классах однородны.

К задачам такого типа относятся в большинстве случаев задачи с непересекающимися классами.

Условие 1 формализуется требованием, чтобы корректный алгоритм реализовывал морфизм категории Φ_i, а условию 2 отвечает категория Σ_j. Таким образом, проблема сводится к рассмотрению категории, морфизмы которой суть отображения, яляющиеся одновременно морфизмами категорий Φ_i и Σ_j. Эта категория будет обозначаться символом $\Phi_i \cap \Sigma_j$.

Поскольку категории Φ_i и Σ_j обе допустимы, то допустима и категория $\Phi_i \cap \Sigma_j$.

Поскольку обе категории Φ_i и Σ_j имеют в качестве подкатегории полную категорию Φ_0, то она является подкатегорией рассматриваемой категории $\Phi_i \cap \Sigma_j$, а потому и категория $\Phi_i \cap \Sigma_j$ полна.

Итак, $\Phi_i \cap \Sigma_j$ — полная допустимая категория и в силу этого может рассматриваться как выражение системы универсальных ограничений для задач классификации.

Нашей основной целью будет описание одноэлементых баз категории $\Phi_i \cap \Sigma_j$, т.е. по сути дела описание регулярных задач с данной системой универсальных ограничений. Для этого прежде всего будет получено описание морфизмов рассматриваемой категории из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$ при произвольных множествах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$.

Лемма 6.3.1. Отображение u из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$ является морфизмом категории $\Phi_i \cap \Sigma_j$ тогда и только тогда, когда для u существует функция f из $\mathfrak{U}^l$ в $\mathfrak{V}$ такая, что

1. для любой матрицы $\widehat{U} = \|U_{ij}\|_{q\times l}$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ из равенства $u(\widehat{U}) = \widehat{V} = \|V_{ij}\|_{q\times l}$ следует, что при всех (i,j) из множества $\mathbb{S}$ выполнено равенство

$$f(U_{ij}, U_{i1}, U_{i2}, \ldots, U_{ij-1}, U_{ij+1}, \ldots, U_{il});$$

2. для любого набора $(U_1, \ldots, U_l)$ из $\mathfrak{U}^l$ и любой подстановки s множества $\{2, 3, \ldots, l\}$ выполнено равенство

$$f(U_1, \ldots, U_l) = f(U_1, U_{s(2)}, \ldots, U_{s(l)}).$$

Доказательство. Пусть u — морфизм категории $\Phi_i \cap \Sigma_j$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$, $\widehat{U} = \|U_{ij}\|_{q\times l}$ — произвольная матрица из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ и $u(\widehat{U}) = \widehat{V} = \|V_{ij}\|_{q\times l}$.

Из того, что u - морфизм категории Φ_i, вытекает, что для u существует набор функций $f_1, \ldots, f_l$ такой, что при всех $(i,j) \in \mathbb{S}$

$$V_{ij} = f_j(U_{i1}, \ldots, U_{il}). \tag{6.3.1}$$

Пусть s — произвольная подстановка множества индексов $\{1, \ldots, l\}$. Поскольку u — одновременно и морфизм категории Σ_j, то выполняется равенство

$$u(s(\|U_{ij}\|_{q\times l})) = u(\left\|U_{is(j)}\right\|_{q\times l}) = s(u(\|U_{ij}\|_{q\times l}) = s(\|V_{ij}\|_{q\times l}) = \left\|V_{is(j)}\right\|_{q\times l}. \tag{6.3.2}$$

Из равенств (6.3.1) и (6.3.2) для всех (i,j) получаем

$$f_j(U_{is(1)}, \ldots, U_{is(l)}) = f_{s(j)}(U_{i1}, \ldots, U_{il}). \tag{6.3.3}$$

Пусть j_0 — произвольный индекс из множества $\{1, \ldots, l\}$ и s_0 — транспозиция $(1, j_0)$, т.е. $s_0(1) = j_0$, $s_0(j_0) = 1$ и $s_0(j) = j$ при $j \in \{2, \ldots, l\}$, $j \neq j_0$. Применяя последнее равенство при $s = s_0$, получаем

$$f_{j_0}(U_{ij_0}, U_{i2}, \ldots, U_{il}) = f_1(U_{i1}, \ldots, U_{il}). \tag{6.3.4}$$

Из этого равенства, положив, что $(U_1, \ldots, U_l)$ — произвольный набор из $\mathfrak{U}^l$, находим

$$f_{j_0}(U_1, \ldots, U_l) = f_1(U_{j_0}, U_2, \ldots, U_1, \ldots, U_l), \tag{6.3.5}$$

так что морфизм u определяется по сути дела единственной функцией f_1, которую можно обозначить просто f.

Положив теперь в равенстве (6.3.3) $j = 1$ и рассматривая в качестве s произвольную подстановку из σ_0 такую, что $s(1) = 1$, получаем, что функция f удовлетворяет условию 2 из формулировки леммы. Учитывая это, из доказанного равенства (6.3.5) находим, что выполнено и условие 1.

Пусть теперь u — отображение из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$, для которого выполнены условия 1 и 2. Определим при всех $j \in \{1, \ldots, l\}$ отображения g_j из $\mathfrak{U}^l$ в себя равенством

$$g_j(U_1, \ldots, U_l) = (U_j, U_1, \ldots, U_{j-1}, U_{j+1}, \ldots, U_l).$$

Положим $f_j = f \circ g_j$. Тогда из условия 1 получаем

$$f_j(U_{i1}, \ldots, U_{il}) = f(U_{ij}, U_{i1}, \ldots, U_{il}) = V_{ij},$$

т.е. отображение u оказывается в данном случае морфизмом категории Φ_i.

Пусть s — произвольная подстановка множества $\{1, \ldots, l\}$, $\|U_{ij}\|_{q\times l}$ — произвольная матрица из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$, $\left\|V'_{ij}\right\|_{q\times l} = u(s(\widehat{U}))$ и $\left\|V''_{ij}\right\|_{q\times l} = s(u(\widehat{U}))$. Из условия 1 при всех $(i,j) \in \mathbb{S}$ получаем

$$V'_{ij} = f(U_{is(j)}, U_{is(1)}, \ldots, U_{is(l)})$$

и

$$V''_{ij} = f(U_{is(j)}, U_{i1}, \ldots, U_{il}),$$

так что в силу условия 2 выполнено равенство $V'_{ij} = V''_{ij}$, что означает, что u — морфизм категории Σ_j.

Являясь одновременно морфизмом категорий Φ_i и Σ_j, отображение u оказывается и морфизмом категории-пересечения $\Phi_i \cap \Sigma_j$, что и требовалось.

Лемма доказана.

Теорема 6.3.2. Пусть $\widehat{U}^0 = \left\|U^0_{ij}\right\|_{q\times l}$ — матрица из пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$. Множество $\{\widehat{U}^0\}$ является базой категории $\Phi_i \cap \Sigma_j$ тогда и только тогда, когда элементы каждой строки матрицы $\widehat{U}^0$ попарно различны и когда строки попарно различны как множества, т.е. для любых $i_1 \neq i_2$ из множества $\{1, \ldots, q\}$ выполнено соотношение

$$\{U^0_{i_1 1}, \ldots, U^0_{i_1 l}\} \neq \{U^0_{i_2 1}, \ldots, U^0_{i_2 l}\}.$$

Доказательство. Пусть при некоторых i и $j_1 \neq j_2$ имеет место равенство $U^0_{ij_1} = U^0_{ij_2}$ и u — морфизм категории $\Phi_i \cap \Sigma_j$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$. Из условий 1 и 2 леммы 6.3.1 для $\left\|U'_{ij}\right\|_{q\times l} = u(\widehat{U}^0)$ получаем:

$$U'_{ij_1} = f(U^0_{ij_1}, U^0_{i1}, \ldots, U^0_{il}) = f(U^0_{ij_2}, U^0_{i1}, \ldots, U^0_{il}) = U'_{ij_2},$$

так что

$$\mathrm{Hom}_{\Phi_i \cap \Sigma_j}(\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}))(\widehat{U}^0) \subseteq \left\{ \|U_{ij}\|_{q\times l} \,\middle|\, \|U_{ij}\|_{q\times l} \in \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}), U_{ij_1} = U_{ij_2} \right\} \subset \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}).$$

Итак, условие попарной различности элементов в каждой строке является необходимым. Будем считать, что оно выполнено.

Пусть при некоторых $i_1 \neq i_2$ из $\{1, \ldots, q\}$ имеет место равенство $\{U^0_{i_1 1}, \ldots, U^0_{i_1 l}\} = \{U^0_{i_2 1}, \ldots, U^0_{i_2 l}\}$. Тогда существует подстановка s_0 множества $\{1, \ldots, l\}$ такая, что при всех j из $\{1, \ldots, l\}$ выполнено равенство $U_{i_2 j} = U_{i_1 s_0(j)}$. Из леммы 6.3.1 получаем, что в этом случае

$$\mathrm{Hom}_{\Phi_i \cap \Sigma_j}(\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}))(\widehat{U}^0) \subseteq$$

$$\subseteq \left\{ \|U_{ij}\|_{q\times l} \,\middle|\, \|U_{ij}\|_{q\times l} \in \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}), U_{i_2 j} = U_{1s(1)}, \ldots, U_{i_2 l} = U_{i_1 s(l)} \right\} \subset \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}).$$

Итак, и условие различности строк как множеств необходимо.

Пусть теперь $\widehat{U}^0$ — матрица, в которой элементы строк попарно различны и строки различны как множества. Тогда при любой матрице $\widehat{U} = \|U_{ij}\|_{q\times l}$ система равенств

$$f(U_{ij}^0, U_{i1}^0, \ldots, U_{il}^0) = U_{ij}$$

корректно определяет функцию f, соответствующий которой морфизм категории $\Phi_i \cap \Sigma_j$ переводит $\widehat{U}^0$ в $\widehat{U}$. В силу отсутствия ограничений на выбор матрицы $\widehat{U}$ это означает, что

$$\mathrm{Hom}_{\Phi_i\cap\Sigma_j}(\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}))(\widehat{U}^0) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}),$$

так что $\{\widehat{U}^0\}$ является базой категории $\Phi_i \cap \Sigma_j$.

Теорема доказана.

6.4 О задачах распознавания с универсальными ограничениями монотонности

Методы алгебраического подхода, как уже говорилось в первых главах работы, пригодны не только для исследования и решения задач классификации, но и для решения более общих задач синтеза алгоритмов преобразования информации. Нашей целью в данном параграфе будет рассмотрение ситуаций, когда пространства возможных начальных и финальных информаций являются частично упорядоченными множествами, а допустимыми считаются только монотонные отображения. Отметим, что во многих практических задачах фигурируют объекты, представленные наборами значений признаков, причем все или некоторые из множеств значений упорядочены и известно, что этот порядок соответствует порядку на множестве ответов (например: «чем выше у пациента температура, тем острее воспалительный процесс»).

Везде ниже под упорядоченными без дальнейших оговорок будут пониматься частично упорядоченные множества, имеющие не менее двух сравнимых элементов.

Итак, в наших задачах определены упорядоченные множества $\mathfrak{I}$ и $\widetilde{\mathfrak{I}}$, зафиксирован набор пар $((I_1, \widetilde{I}_1), \ldots, (I_q, \widetilde{I}_q))$ из $(\mathfrak{I} \times \widetilde{\mathfrak{I}})^q$ и требуется построить алгоритм A, реализующий монотонное отображение A из $\mathfrak{I}$ в $\widetilde{\mathfrak{I}}$ такое, что при всех $i \in \{1, \ldots, q\}$ выполнено равенство $A(I_i) = \widetilde{I}_i$.

Непосредственно из определения монотонного отображения вытекает условие разрешимости поставленной задачи:

$$\forall i_1, i_2((I_{i_1} \geqslant I_{i_2}) \to (\widetilde{I}_{i_1} \geqslant \widetilde{I}_{i_2})), \tag{6.4.1}$$

где $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, q\}$.

Как и ранее, будем считать параметр q произвольным, но фиксированным натуральным числом и, рассматривая в основном вопрос о синтезе решения, будем анализировать проблему построения отображения A из $\mathfrak{C}_q(\mathfrak{I})$ в $\mathfrak{C}_q(\widetilde{\mathfrak{I}})$ [1] такого, что

$$A(I_1, \ldots, I_q) = (F(I_1), \ldots, F(I_q)) = (\widetilde{I}_1, \ldots, \widetilde{I}_q)$$

при условии монотонности функции F (случай аналогичен категории Φ_0 из предыдущих глав).

Для любого частично упорядоченного множества $\mathfrak{U}$ любому q-набору элементов этого множества соответствует транзитивное и рефлексивное бинарное отношение на q элементах, т.е., по сути дела, на множестве индексов $\{1, \ldots, q\}$. Такое отношение для набора элементов $\bar{U}$ будет обозначаться $\pi(\bar{U})$ (при этом следует иметь в виду, что $\pi(\bar{U}) \subseteq \{1, \ldots, q\}^2$). Пусть, например, $\mathfrak{U} = \{a, b, c\}$, где $a > b$, $a \| c$ и $b \| c$ (символ «$\|$» означает несравнимость); тогда $\pi(a, a, b, c) = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1), (1,3), (2,3)\}$. Отношения такого типа будем называть q-порядками.

Используя введенное обозначение, условие (6.4.1) можно записать следующим образом:

$$\pi(I_1, \ldots, I_q) \subseteq \pi(\widetilde{I}_1, \ldots, \widetilde{I}_q). \tag{6.4.2}$$

Отсюда вытекает, что у разрешимой задачи «монотонными образами» вектора информации $\bar{I} \in \mathfrak{C}_q(\mathfrak{I})$ могут быть такие и только такие наборы $\widetilde{\bar{I}}$ из пространства информационных векторов $\mathfrak{C}_q(\widetilde{\mathfrak{I}})$, что q-порядок $\pi(\widetilde{\bar{I}})$ содержит $\pi(\bar{I})$ в качестве подмножества.

Пусть π_0 — произвольное отношение q-порядка и $\mathfrak{U}$ — упорядоченное множество. Символом $\mathfrak{C}_q(\mathfrak{U})|_{\pi_0}$ будем обозначать подмножество пространства $\mathfrak{C}_q(\mathfrak{U})$, состоящее из всех векторов $\bar{U}$ таких, что $\pi_0 \subseteq \pi(\bar{U})$. Отметим, что при любом непустом $\mathfrak{U}$ и произвольном π_0 множество $\mathfrak{C}_q(\mathfrak{U})|_{\pi_0}$ непусто (оно содержит, в частности, все наборы, состоящие из попарно равных элементов).

Теперь мы имеем возможность рассматривать описанные задачи как задачи с соответствующими универсальными ограничениями, выраженными категорией M. Объекты этой категории — пространства q-векторов над упорядоченными множествами и все конечные декартовы степени таких пространств. Морфизмы категории M — отображения объектов друг в друга, порожденные монотонными отображениями соответствующих упорядоченных множеств. Например, если $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — упорядоченные множества и u — отображение из $\mathfrak{C}_q(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}_q(\mathfrak{V})$, то u оказывается морфизмом категории M в том и только в том случае, когда существует монотонная функция F из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{V}$ такая, что для всех $(U_1, \ldots, U_q) \in \mathfrak{C}_q(\mathfrak{U})$ выполнено равенство $u(U_1, \ldots, U_q) = (F(U_1), \ldots, F(U_q))$.

Допустимость категории‘M, т.е. то, что произведения и диагонализации морфизмов снова оказываются морфизмами, очевидна. Поэтому категория M может рассматриваться как адекватная формализация системы универсальных ограничений при использовании конструкций алгебраического подхода.

При изучении задач классификации важную роль играло, наряду со свойством допустимости, свойство полноты соответствующих категорий. У категории M аналогичное

[1] При произвольном множестве $\mathfrak{U}$ символом $\mathfrak{C}_q(\mathfrak{U})$ обозначается пространство q-векторов над множеством $\mathfrak{U}$.

свойство имеется, т.е. для любых упорядоченных $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ выполнено равенство

$$\cup_{p=0}^{\infty} \operatorname{Hom}_M(\mathfrak{C}_q^p(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}_q(\mathfrak{V}))(\mathfrak{C}_q(\mathfrak{U})) = \mathfrak{C}_q(\mathfrak{V}). \tag{6.4.3}$$

Доказательство этого факта будет получено ниже.

Полнота категории M в смысле (6.4.3) может представить интерес, только если непосредственно перенести на задачи с ограничением монотонности определение регулярности, использованное для задач классификации. Такой непосредственный перенос оказывается, однако, малоинтересен. Действительно, для задачи Z с вектором информации $\bar{I}$ «классификационное» требование регулярности сводится к равенству

$$\operatorname{Hom}_M(\mathfrak{C}_q(\mathfrak{I}), \mathfrak{C}_q(\widetilde{\mathfrak{I}}))(\bar{I}) = \mathfrak{C}_q(\widetilde{\mathfrak{I}}), \tag{6.4.4}$$

но это равенство эквивалентно требованию, чтобы все элементы вектора $\bar{I}$ были попарно несравнимы.

Чтобы ввести более адекватное понятие регулярности, вспомним, что регулярность в общем случае определялась как требование «коллективной разрешимости» задач из некоторых семейств, т.е. понятие регулярности опиралось на разбиение классов рассматриваемых задач на подмножества «близких» в определенном смысле задач. Для изучаемых задач с ограничением монотонности предлагается следующее опеределение соответствующей эквивалентности:

Определение 6.4.1. Задачи Z_1 и Z_2, определенные парами векторов $((I_1^1, \ldots, I_q^1)$, $(\widetilde{I}_1^1, \ldots, \widetilde{I}_q^1))$ и, соответственно, $((I_1^2, \ldots, I_q^2)$, $(\widetilde{I}_1^2, \ldots, \widetilde{I}_q^2))$, называются *соседними*, если $I_i^1 = I_i^2$ при всех $i \in \{1, \ldots, q\}$ и если имеется пара $i_1 \neq i_2$ из $\{1, \ldots, q\}$ такая, что $I_{i_1}^1 \| I_{i_2}^1$, $\widetilde{I}_i^2 = \widetilde{I}_{i_2}^1$ для всех i таких, что $\widetilde{I}_i^1 = \widetilde{I}_{i_1}^1$, $\widetilde{I}_i^2 = \widetilde{I}_{i_1}^1$ для всех i таких, что $\widetilde{I}_i^1 = \widetilde{I}_{i_2}^1$, и $\widetilde{I}_i^2 = \widetilde{I}_i^1$ при всех остальных i из $\{1, \ldots, q\}$. Задачи Z_1 и Z_2 *эквивалентны*, если существует набор задач $Z_1', \ldots, Z_p'$ такой, что $Z_1 = Z_1'$, $Z_2 = Z_p'$ и при всех k из $\{1, \ldots, p-1\}$ задачи Z_k' и Z_{k+1}' — соседние.

На содержательном уровне введение понятия соседних задач можно обосновать следующими соображениями. Пусть в задаче Z элементы I_{i_1} и I_{i_2} вектора информации $\bar{I}$ несравнимы и для них корректный алгоритм должен порождать значения $\widetilde{I}_{i_1}$ и $\widetilde{I}_{i_2}$. Несравнимость I_{i_1} и I_{i_2} не может привести к тому, что $\widetilde{I}_{i_1}$ и $\widetilde{I}_{i_2}$ полностью произвольны, поскольку с I_{i_1} или с I_{i_2} могут быть сравнимы другие элементы вектора $(I_1, \ldots, I_q)$. Однако несравнимость I_{i_1} и I_{i_2} можно выразить требованием, чтобы задача оставалась разрешимой при транспозиции значений $\widetilde{I}_{i_1}$ и $\widetilde{I}_{i_2}$.

Рассмотрим теперь вопрос об отношениях порядка на векторах информации и информационных векторах, определяющих регулярные задачи. Поскольку из определения 6.4.1 вытекает, что регулярность зависит только от соотношения порядков на этих векторах, то поставленный вопрос есть на самом деле вопрос о критерии регулярности.

Пусть π_0 — произвольный q-порядок. Сопоставим отношению π_0 отношение q-эквивалентности $\rho(\pi_0)$, определив его как транзитивное замыкание объединения симметричного отношения несравнимости в смысле π_0 и отношения равенства. Таким образом, любые индексы i_1 и i_2 из $\{1, \ldots, q\}$ эквивалентны в смысле отношения $\rho(\pi_0)$ тогда и только тогда, когда либо $i_1 = i_2$, либо $i_1 \| i_2$, либо существуют $i_1', \ldots, i_p'$ такие, что $i_1 \| i_1', i_1' \| i_2', i_2' \| i_3', \ldots, i_p' \| i_2$, где несравнимость определяется отношением π_0. Классы эквивалентности по $\rho(\pi_0)$ будем называть блоками несравнимости.

Отметим, что отношением π_0 на множестве блоков несравнимости по $\rho(\pi_0)$ (на фактор-множестве) индуцируется естественным образом линейный порядок. Действительно, пусть M_1 и M_2 — блоки несравнимости, $i_1 \in M_1$, $i_2 \in M_1$, $i_1 \| i_2$ и $i \in M_2$. Ясно, что индексы i_1 и i_2 сравнимы с i в смысле отношения π_0 (иначе они лежали бы в общем блоке). Если бы имели место противоположные неравенства, скажем для определенности, $i_1 < i$ и $i < < i_2$, то из транзитивности π_0 мы бы имели $i_1 < i_2$, что противоречит предположению о несравнимости i_1 и i_2. Очевидно, что сказанное имеет место и для случая, когда i_1 и i_2 сравнимы, но могут быть соединены цепочкой несравнимых элементов.

Допустим теперь, что Z — регулярная задача, определенная парой векторов $(\bar{I}, \widetilde{I}) = = ((I_1, \ldots, I_q), (\widetilde{I}_1, \ldots, \widetilde{I}_q))$, причем без ограничения общности будем предполагать, что элементы $I_1, \ldots, I_q$ попарно различны (наличие равенств сводится по сути дела к уменьшению размерности). Покажем, что в этом случае для любых сравнимых I_{i_1} и I_{i_2}, принадлежащих одному блоку несравнимости в смысле $\rho(\pi(I))$, должно быть выполнено равенство $\widetilde{I}_{i_1} = \widetilde{I}_{i_2}$.

Действительно, пусть, скажем, $I_{i_1} > I_{i_2}$, $\widetilde{I}_{i_1} \neq \widetilde{I}_{i_2}$ и имеются $i'_1, \ldots, i'_p$ такие, что $I_{i_1} \| I_{i'_1}$, $I_{i'_1} \| I_{i'_2}$, $I_{i'_2} \| I_{i'_3}$, ..., $I_{i'_p} \| I_{i_2}$. Из разрешимости задачи Z следует, что выполнено условие $\widetilde{I}_{i_1} > > \widetilde{I}_{i_2}$, а так как должна быть разрешима и задача с информационным вектором, отличающимся от исходного транспозицией значений $\widetilde{I}_{i_1}$ и $\widetilde{I}_{i_2}$, то должно быть выполнено и неравенство $\widetilde{I}_{i_2} > \widetilde{I}_{i_1}$ — противоречие.

Теперь уже очевидна характеризация отношений порядка на векторах, определяющих регулярные задачи, для описания которой введем еще одно понятие.

Пусть π_0 — отношение q-порядка, $\rho(\pi_0)$ — соответствующая эквивалентность и $M_1, \ldots, M_p$ — блоки несравнимости. Определим отношение эквивалентности $\sigma(\pi_0)$ на $\{1, \ldots, q\}$ следующим образом: i_1 и i_2 эквивалентны в смысле $\sigma(\pi_0)$ тогда и только тогда, когда $i_1 = i_2$ или i_1 и i_2 лежат в одном блоке несравнимости M_k и либо сравнимы между собой, либо в M_k имеются $i'_1, \ldots, i'_r$ такие, что i_1 сравнимо с i'_1, i_2 сравнимо с i'_r и при всех $t \in \{1, \ldots, r-1\}$ индексы i'_t и i'_{t+1} сравнимы в смысле отношения π_0. Классы эквивалентности по отношению $\sigma(\pi_0)$ естественно назвать сравнимыми подблоками блоков несравнимости. Теперь отношению π_0 можно сопоставить отношение q-порядка $\pi_0 \cup \sigma(\pi_0)$, которое будет обозначаться ${\pi^*}_0$.

Итак, из вышесказанного вытекает, что задача Z, определенная вектором информации $\bar{I} = (I_1, \ldots, I_q)$ и информационным вектором $\bar{\widetilde{I}} = (\widetilde{I}_1, \ldots, \widetilde{I}_q)$, регулярна тогда и только тогда, когда для любых i_1 и i_2 из любого сравнимого подблока любого блока несравнимости в смысле $\pi(\bar{I})$ выполнено равенство $\widetilde{I}_{i_1} = \widetilde{I}_{i_2}$. Иначе говоря, задача Z регулярна тогда и только тогда, когда $\pi^*(\bar{I}) \subseteq \pi(\bar{\widetilde{I}})$.

Отметим, что из полученного критерия следует, что регулярны, в частности, задачи с линейным порядком на векторе информации и (более общий случай) задачи, у которых отношение несравнимости на векторе информации в объединении с отношением равенства оказывается транзитивным, т.е. отношением эквивалентности (такие отношения порядка можно назвать квазилинейными). Для разрешимых задач такого типа регулярность не зависит от информационного вектора.

При изучении разрешимости и регулярности задач с ограничением монотонности интересны «коллективные отображения» не на «целые» пространства векторов типа $\mathfrak{C}_q(\mathfrak{U})$, но на «приведенные» подпространства типа $\mathfrak{C}_q(\mathfrak{U})|_{\pi_0}$ при произвольных (разрешимость) или квазилинейных (регулярность) отношениях q-порядка π_0. Именно этот вопрос и будет рассматриваться ниже.

Покажем прежде всего, что категория M обладает более сильным свойством полноты, нежели выраженное по аналогии со случаем проблемы классификации равенством (6.4.3). А именно, покажем, что для произвольных упорядоченных множеств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ и любого q-порядка π_0 выполнено равенство

$$\cup_{p=0}^{\infty} \mathrm{Hom}_M(\mathfrak{C}_q^p(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}_q(\mathfrak{V}))(\mathfrak{C}_q(\mathfrak{U})|_{\pi_0}) = \mathfrak{C}_q(\mathfrak{V})|_{\pi_0}. \tag{6.4.5}$$

Доказательство равенства (6.4.5) базируется на двух простых леммах, для формулировки которых введем новое обозначение. Пусть $\mathfrak{U}$ — произвольное упорядоченное множество и $X \subseteq \mathfrak{C}_q(\mathfrak{U})$. Символом $\pi(X)$ будет обозначаться пересечение всех $\pi(\bar{U})$, при $\bar{U}$, пробегающем множество X. Отметим, что в любом (бесконечном) множестве X всегда имеется конечный набор векторов $\{\bar{U}^1, \ldots, \bar{U}^p\}$ такой, что выполнено равенство $\pi(X) = \pi(\{\bar{U}^1, \ldots, \bar{U}^p\})$.

Лемма 6.4.1. Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — произвольные упорядоченные множества и X — подмножество пространства $\mathfrak{C}_q(\mathfrak{U})$. Тогда имеет место равенство

$$\cup_{p=0}^{\infty} \mathrm{Hom}_M(\mathfrak{C}_q^p(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}_q(\mathfrak{V}))(X) = \mathfrak{C}_q(\mathfrak{V})|_{\pi(X)}. \tag{6.4.6}$$

Доказательство. Пусть $(\bar{U}^1, \ldots, \bar{U}^p)$ — набор векторов из множества X такой, что $\pi(X) = \pi(\{\bar{U}^1, \ldots, \bar{U}^p\})$, и пусть задан произвольный вектор $\bar{V} = (V_1, \ldots, V_q)$ из $\mathfrak{C}_q(\mathfrak{V})|_{\pi(X)}$. Очевидно, что $\pi(\{\bar{U}^1, \ldots, \bar{U}^p\}) \subseteq \pi(\bar{V})$. Это соотношение, считая, что $\bar{U}^k = (U_1^k, \ldots, U_q^k)$ при $k \in \{1, \ldots, p\}$, можно записать так:

$$\forall i_1, i_2((\forall k(U_{i_1}^k \geqslant U_{i_2}^k)) \to (V_{i_1} \geqslant V_{i_2})), \tag{6.4.7}$$

где $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, q\}$ и $k \in \{1, \ldots, p\}$.

Определим морфизм u категории M из $\mathfrak{C}_q^p(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}_q(\mathfrak{V})$ функцией F из $\mathfrak{U}^p$ в $\mathfrak{V}$ такой, что при всех $i \in \{1, \ldots, q\}$ выполнено равенство $F(U_i^1, \ldots, U_i^p) = V_i$. В силу условия (6.4.7) функция F монотонна на q-элементном подмножестве $\{(U_1^1, \ldots, U_1^p), \ldots, (U_q^1, \ldots, U_q^p)\}$ множества $\mathfrak{U}^p$. Выбрав ее значения на остальных элементах множества $\mathfrak{U}^p$ из соображений монотонности, получаем искомый морфизм.

Легко видеть, что $u(\bar{U}^1, \ldots, \bar{U}^p) = \bar{V}$, что в силу произвольности выбора вектора V и означает выполнение равенства (6.4.6).

Лемма доказана.

Лемма 6.4.2. Пусть $\mathfrak{U}$ — произвольное упорядоченное множество, π_0 — произвольный q-порядок. Тогда

$$\pi(\mathfrak{C}_q(\mathfrak{U})|_{\pi_0}) = \pi_0. \tag{6.4.8}$$

Доказательство. Для любой пары (i_1, i_2) из π_0 и любого вектора $\bar{U}$ из $\mathfrak{C}_q(\mathfrak{U})|_{\pi_0}$ выполнено включение $(i_1, i_2) \in \pi(\bar{U})$, а потому

$$(i_1, i_2) \in \pi(\mathfrak{C}_q(\mathfrak{U})|_{\pi_0}) = \bigcap_{\bar{U} \in \mathfrak{S}_q(\mathfrak{U})|_{\pi_0}} \pi(\bar{U}).$$

Пусть теперь $(i_1, i_2) \notin \pi_0$. Положим $M_1 = \{i | (i_1, i) \in \pi_0\}$ и M_2 — дополнение M_1 до $\{1, \dots, q\}$. В силу общего предположения в множестве $\mathfrak{U}$ имеются элементы U_1 и U_2 такие, что $U_1 < U_2$.

Пусть $\bar{U}^0 = (U_1^0, \dots, U_q^0)$ — вектор из $\mathfrak{C}_q(\mathfrak{U})$ такой, что $U_i^0 = U_1$ при $i \in M_1$ и $U_i^0 = U_2$ при $i \in M_2$.

Из предположения $(i_1, i_2) \notin \pi_0$ следует, что $i_2 \in M_2$, так что $U_{i_1}^0 = U_1$, $U_{i_2}^0 = U_2$ и в силу $U_1 < U_2$ в таком случае выполнено $(i_1, i_2) \notin \pi(\bar{U}^0)$.

Покажем теперь, что $\pi_0 \subseteq \pi(\bar{U}^0)$. Ясно, что $\pi(U^0) = \{1, \dots, q\}^2 - \{(i_1, i_2) | i_1 \in M_1, i_2 \in \in M_2\} = \{1, \dots, q\}^2 - M_1 \times M_2$. Пусть $(i_1^0, i_2^0) \notin \pi(\bar{U}^0)$, т.е. $i_1^0 \in M_1$ и $i_2^0 \in M_2$. В этом случае $(i_1, i_1^0) \in \pi_0$. Если $(i_2^0, i_1) \in \pi_0$, то из транзитивности отношения π_0 следует, что $(i_2^0, i_1^0) \in \pi_0$, так что $(i_1^0, i_2^0) \notin \pi_0$. Если же $(i_2^0, i_1) \notin \pi_0$, то предположение $(i_1^0, i_2^0) \in \pi_0$ вместе с $(i_1, i_1^0) \in \pi_0$ приводит к $(i_1, i_2^0) \in \pi_0$, что противоречит включению $i_2^0 \in M_2$, так что и в этом случае $(i_1^0, i_2^0) \notin \pi_0$.

Итак, из $(i_1^0, i_2^0) \notin \pi(\bar{U}^0)$ вытекает $(i_1^0, i_2^0) \notin \pi_0$, что и означает выполнение включения $\pi_0 \subseteq \pi(\bar{U}^0)$, так что выполнено и $\bar{U}^0 \in \mathfrak{C}_q(\mathfrak{U})|_{\pi_0}$.

Таким образом, для любой пары (i_1, i_2), не входящей в отношение π_0, в множестве $\mathfrak{C}_q(\mathfrak{U})|_{\pi_0}$ имеется вектор $\bar{U}^0$ такой, что $(i_1, i_2) \notin \pi(\bar{U}^0)$. Поэтому

$$\pi(\mathfrak{C}_q(\mathfrak{U})|_{\pi_0}) = \bigcup_{\bar{U} \in \mathfrak{S}_q(\mathfrak{U})|_{\pi_0}} \pi(\bar{U}) \subseteq \pi_0.$$

Лемма доказана.

Полагая в лемме 6.4.1 $X = \mathfrak{C}_q(\mathfrak{U})|_{\pi_0}$ и используя лемму 6.4.2, получаем доказательство равенства (6.4.5).

При $\pi_0 = \{(1,1), (2,2), \dots, (q,q)\}$ из (6.4.5) вытекает равенство (6.4.3).

Переход от «целых» пространств матриц к их подпространствам, реализованный в случае задач классификации путем использования баз полных допустимых категорий, для задач с ограничением монотонности требует рассмотрения понятия π_0-баз, вводимого следующим определением.

Определение 6.4.2. Пусть $\mathfrak{U}$ — произвольное упорядоченное множество, π_0 — произвольный q-порядок, X — подмножество пространства векторов $\mathfrak{C}_q(\mathfrak{U})$. Множество X называется π_0-*базой*, если выполнено условие

$$\cup_{p=0}^{\infty} \operatorname{Hom}_M(\mathfrak{C}_q^p(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}_q(\mathfrak{U}))(X) \supseteq \mathfrak{C}_q(\mathfrak{U})|_{\pi_0}. \tag{6.4.9}$$

Из леммы 6.4.2 вытекает, что множество X является π_0-базой тогда и только тогда, когда $\pi(X) \subseteq \pi_0$. Более того, из этой же леммы следует, что, как и в случае задач классификации, свойство «быть базой» сохраняется при отображениях одного пространства в другое. Чтобы сформулировать это более точно, введем еще одно определение.

Определение 6.4.3. Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — произвольные упорядоченные множества, π_0 — произвольный q-порядок и X - подмножество пространства векторов $\mathfrak{C}_q(\mathfrak{U})$. Множество X называется π_0-*базой в* $\mathfrak{C}_q(\mathfrak{U})$ *для* $\mathfrak{C}_q(\mathfrak{V})$, если выполнено условие

$$\cup_{p=0}^{\infty} \operatorname{Hom}_M(\mathfrak{C}_q^p(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}_q(\mathfrak{V}))(X) \supseteq \mathfrak{C}_q(\mathfrak{V})|_{\pi_0}. \tag{6.4.10}$$

Основное утверждение о π_0-базах можно оформить в виде отдельной леммы.

Лемма 6.4.3. Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — произвольные упорядоченные множества, π_0 — произвольный q-порядок и X — подмножество пространства векторов $\mathfrak{C}_q(\mathfrak{U})$. Множество X является π_0-базой в $\mathfrak{C}_q(\mathfrak{U})$ для $\mathfrak{C}_q(\mathfrak{V})$ тогда и только тогда, когда X является π_0-базой.

Теперь мы имеем возможность описать свойства, которыми должны обладать модели алгоритмов и алгоритмических операторов, а также семейства корректирующих операций и решающих правил, пригодные для решения с помощью алгебраических конструкций задач с ограничением монотонности.

Отметим прежде всего, что в любом пространстве векторов $\mathfrak{C}_q(\mathfrak{U})$ любой вектор $\bar{U}$ является одноэлементной $\pi(\bar{U})$-базой.

Определение 6.4.4. Пусть $\mathfrak{M} \subseteq \operatorname{Hom}_M(\mathfrak{C}_q(\mathfrak{I}), \mathfrak{C}_q(\widetilde{\mathfrak{I}}))$, т.е. $\mathfrak{M}$ — модель монотонных алгоритмов распознавания. Модель $\mathfrak{M}$ называется *полной*, если для любого вектора $\bar{I}$ из пространства векторов информации $\mathfrak{C}_q(\mathfrak{I})$, определяющего регулярную задачу, выполнено условие $\mathfrak{C}_q(\widetilde{\mathfrak{I}})|_{\pi^*(\bar{I})} \subseteq \mathfrak{M}(\bar{I})$.

Определение 6.4.5. Пусть $\mathfrak{M}^0 \subseteq \operatorname{Hom}_M(\mathfrak{C}_q(\mathfrak{I}), \mathfrak{C}_q(\mathfrak{R}))$, т.е. $\mathfrak{M}^0$ — модель монотонных алгоритмических операторов. Модель $\mathfrak{M}^0$ называется *полной*, если для любого вектора $\bar{I}$ из пространства векторов информации $\mathfrak{C}_q(\mathfrak{I})$ множество $\mathfrak{M}^0(\bar{I})$ является $\pi^*(\bar{I})$-базой в пространстве векторов оценок $\mathfrak{C}_q(\mathfrak{R})$.

Определение 6.4.6. Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \cup_{p=0}^{\infty} \operatorname{Hom}_M(\mathfrak{C}_q^p(\mathfrak{R}), \mathfrak{C}_q(\mathfrak{R}))$, т.е. $\mathfrak{F}$ — семейство монотонных корректирующих операций. Семейство $\mathfrak{F}$ называется *полным*, если для любого q-порядка π_0 и любой ${\pi^*}_0$-базы Y в $\mathfrak{C}_q(\mathfrak{R})$ выполнено $\mathfrak{F}(X) \supseteq \mathfrak{C}_q(\mathfrak{R})|_{\pi_0^*}$.

Определение 6.4.7. Пусть $\mathfrak{M}^1 \subseteq \cup_{p=0}^{\infty} \operatorname{Hom}_M(\mathfrak{C}_q^p(\mathfrak{R}), \mathfrak{C}_q(\widetilde{\mathfrak{I}}))$, т.е. $\mathfrak{M}^1$ — семейство монотонных решающих правил. Семейство $\mathfrak{M}^1$ называется *корректным*, если для любого q-порядка π_0 выполнено равенство $\mathfrak{M}^1(\mathfrak{C}_q(\mathfrak{R})|_{\pi_0^*}) = \mathfrak{C}_q(\widetilde{\mathfrak{I}})|_{\pi_0^*}$.

Суть введенных определений в том, что они задают экстремальные свойства семейств отображений, пригодных для решения задач с ограничением монотонности. Рассуждения, подтверждающие этот факт, полностью аналогичны проведенным ранее в гл. 3.

Литература

[1] Айдарханов М.Б. К решению задач распознавания с информацией, заданной перечислением областей // ЖВМ и МФ. 1983. Т. 23, № 3. С. 719-729.

[2] Айзенберг Н.Н., Журавлев Ю.И., Пилюгин С.В. Применение сверточных алгебр для построения корректных распознающих алгоритмов // ЖВМ и МФ. 1987. Т. 27, № 6. С. 912-923.

[3] Айзерман М.А., Браверман Э.М., Розоноэр Л.И. Метод потенциальных функций в теории обучения машин. М.: Наука,1970. 320 с.

[4] Алексанян А.А., Журавлев Ю.И. Об одном подходе к построению эффективных алгоритмов распознавания // ЖВМ и МФ. 1985. Т. 25, № 2. С. 283-291.

[5] Амиргалиев Е.Н., Мухамедгалиев А.Ф. Оптимизационная модель алгоритмов классификации // ЖВМ и МФ. 1985. Т. 25, № 11. С. 1733-1737.

[6] Асланян Л.А. Алгоритмы распознавания с логическими отделителями // Сб. работ по матем. кибернетике.Вып. 1. М.: ВЦ АН СССР, 1976. С. 116-131.

[7] Ашуров А.Р., Рудаков К.В. О задачах распознавания образов с континуальной начальной информацией. М.: ВЦ АН СССР, 1983. 21 с.

[8] Ашуров А.Р., Рудаков К.В. Алгоритмы вычисления оценок для задач с континуальной начальной информацией // ЖВМ и МФ. 1984. Т. 24, № 12. С. 1871-1880.

[9] Бак Хынг Кханг. Достаточное условие полноты линейных замыканий алгоритмов распознавания // Кибернетика. 1978. № 4. С. 131-137.

[10] Баскакова Л.В., Журавлев Ю.И. Модель распознающих алгоритмов с представительными наборами и системами опорных множеств // ЖВМ и МФ. 1981. Т. 21, № 5. С. 1264-1275.

[11] Белецкий Н.Г. Задача коррекции параметров объекта в распознавании образов // ЖВМ и МФ. 1987. Т. 27, № 4. С. 610-616.

[12] Березина В.В., Рудаков К.В. О моделях алгоритмов распознавания для решения одной задачи медицинского прогнозирования // Кибернетика. 1983. № 4. С. 116-119.

[13] Бонгард М.М. Проблема узнавания. М.: Наука, 1967. 320 с.

[14] Букур И., Деляну А. Введение в теорию категорий и функторов. М.: Мир, 1972. 260 с.

[15] Бурбаки Н. Теория множеств. М.: Мир, 1965. 456 с.

[16] Вайнцвайг М.Н. Алгоритм обучения распознаванию образов "Кора"// Алгоритмы обучения распознаванию образов. М.: Сов. радио, 1973. С. 82-91.

[17] Вапник В.Н., Червоненкис А.Я. Теория распознавания образов. М.: Наука, 1974. 418 с.

[18] Вапник В.Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. М.: Наука, 1979. 448 с.

[19] Вапник В.Н., Червоненкис А.Я. Необходимые и достаточные условия равномерной сходимости средних к их математическим ожиданиям // Теория вероятности и ее применения. 1981. Т. 26, № 3. С. 543-563.

[20] Вапник В.Н. Индуктивные принципы поиска эмпирических закономерностей // Распознавание, классификация, прогноз. М.: Наука, 1989. С. 17-82.

[21] Варсонофьев Д.В., Исаев И.В., Кольцов П.П. Пакет алгоритмов распознавания и классификации (ПАРК) в мониторной системе ДУБНА. М.: ВЦ АН СССР, 1983. 20 с.

[22] Васильев В.И. Конструирование пространства в процессе обучения распознаванию образов // Автоматика. Киев: 1982. № 5. С. 18-27.

[23] Васильев В.И. Распознающие системы. Киев: Наукова думка, 1983. 466 с.

[24] Васильев В.И. О простоте решающих функций в проблеме обучения распознаванию образов // Автоматика. Киев: 1984. № 2. С. 14-23.

[25] Васильев В.И., Овсяникова Ф.П. Обучение распознаванию образов с заданной надежностью // Кибернетика. 1986. № 3. С. 50-56.

[26] Верхаген К., Дейн Р., Грун Ф., Иостен И., Вербек П. Распознавание образов. Проблемы и перспективы. М.: Радио и связь. 1985. 104 с.

[27] Вычислительные машины и мышление /Под ред. Э.Фейгенбаума и Дж.Фельдмана. М.: Мир, 1967. 552 с.

[28] Гельфанд И.М., Губерман Ш.А., Шифрин М.А. Прогнозирование и распознавание в медицинских задачах // Распознавание, классификация, прогноз. М.: Наука, 1989. С. 201-228.

[29] Глаз А.Б. Параметрическая и структурная адаптация решающих правил в задачах распознавания. Рига: Зинатне, 1988. 172 с.

[30] Горелик А.Л. Общая постановка задачи распознавания объектов и явлений // Кибернетика. 1980. № 6. С. 72-75.

[31] Горелик А.Л. О регуляризации задачи распознавания объектов и явлений // Кибернетика. 1986. № 5. С. 103-105.

[32] Горелик А.Л. Управление работой экспертных систем распознавания // Математические методы распознавания образов: Тез. докл. Всесоюзн. конф. Часть 6. (Рига, 24-26 октября 1989 г.). Рига:МИПКРРиС при СМ ЛатвССР, 1989. С.24-26.

[33] Горелик А.Л., Гуревич И.Б., Скрипник В.А. Современное состояние проблемы распознавания. М.: Радио и связь, 1984. 160 с.

[34] Горелик А.Л., Скрипник В.А. Методы распознавания. М.: Высшая школа, 1984. 208 с.

[35] Горелик А.Л., Эпштейн С.С. Об условиях аддитивности информации в задачах распознавания // Кибернетика. 1983. № 6. С. 85-88.

[36] Гренандер У. Лекции по теории образов. М.: Мир, Т. 1. 1979. 384 с.; Т. 2. 1981. 448 с.; Т. 3. 1983. 432 с.

[37] Гуревич И.Б., Журавлев Ю.И. Минимизация булевых функций и эффективные алгоритмы распознавания // Кибернетика. 1974. № 3. С. 16-20.

[38] Дмитриев А.И., Журавлев Ю.И., Кренделев Ф.П. О математических принципах классификации предметов или явлений // Дискретный анализ. Вып. 7. Новосибирск, 1966. С. 3-17.

[39] Дмитриев А.И., Журавлев Ю.И., Кренделев Ф.П. Об одном принципе классификации и прогноза геологических объектов и явлений // Известия Сиб.отд. АН СССР, Геология и геофизика. 1968. Т. 5. С. 50-64.

[40] Донской В.И. Алгоритмы обучения, основанные на построении решающих деревьев // ЖВМ и МФ. 1982. Т. 22, № 4. С. 963-974.

[41] Донской В.И. Слабоопределенные задачи линейного булева программирования с частично заданным множеством допустимых решений // ЖВМ и МФ. 1988. Т. 28, № 9. С. 1379-1385.

[42] Донской В.И. Бинарные отношения, порожденные распределением парных оценок близости, и классификация на их основе // Математические методы распознавания образов: Тез. докл. Всесоюзн. конф. (Дилижан, 16-21 мая 1985 г.). Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1985. С. 61-63.

[43] Дуда Р., Харт П. Распознавание образов и анализ сцен. М.: Мир, 1976. 511 с.

[44] Дюкова Е.В. Об асимптотически оптимальном алгоритме построения тупиковых тестов // ДАН СССР. 1977. Т. 233, № 4. С. 527-530.

[45] Дюкова Е.В. Об асимптотически оптимальном алгоритме построения тупиковых тестов для бинарных таблиц // Проблемы кибернетики. Вып. 34. М.: Наука, 1978. С. 169-186.

[46] Дюкова Е.В. Асимптотически оптимальные тестовые алгоритмы в задачах распознавания // Проблемы кибернетики. Вып. 39. М.: Наука, 1982. С. 165-199.

[47] Дюкова Е.В. О сложности реализации некоторых процедур распознавания // ЖВМ и МФ. 1987. Т. 27, № 1. С. 114-127.

[48] Дюкова Е.В., Рязанов В.В. О решении прикладных задач алгоритмами распознавания, основанными на принципе голосования. М.: ВЦ АН СССР, 1986. 26 с.

[49] Журавлев Ю.И., Никифоров В.В. Алгоритмы распознавания, основанные на вычислении оценок // Кибернетика. 1971. № 3. С. 1-11.

[50] Журавлев Ю.И., Камилов М.М., Туляганов Ш.Е. Алгоритмы вычисления оценок и их применение. Ташкент: ФАН, 1974.119 с.

[51] Журавлев Ю.И., Мирошник С.Н., Швартин С.М. Об одном подходе к оптимизации в классе параметрических алгоритмов распознавания // ЖВМ и МФ. 1976. Т. 16, № 1. С. 209-218.

[52] Журавлев Ю.И. Экстремальные алгоритмы в математических моделях для задач распознавания и классификации // ДАН СССР. 1976. Т. 231, № 3. С. 532-535.

[53] Журавлев Ю.И. Непараметрические задачи распознавания образов // Кибернетика. 1976. № 6. С. 93-103.

[54] Журавлев Ю.И. Корректные алгебры над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов. I // Кибернетика. 1977. № 4. С. 5-17.

[55] Журавлев Ю.И. Корректные алгебры над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов. II // Кибернетика. 1977. № 6. С. 21-27.

[56] Журавлев Ю.И. Корректные алгебры над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов. III // Кибернетика. 1978. № 2. С. 35-43.

[57] Журавлев Ю.И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классиикации // Проблемы кибернетики. Вып. 33. М.: Наука, 1978. С. 5-68.

[58] Журавлев Ю.И., Зенкин А.А., Зенкин А.И., Исаев И.В., Кольцов П.П., Кочетков Д.В., Рязанов В.В. Задачи распознавания или классификации со стандартной обучающей информацией // ЖВМ и МФ. 1980. Т. 20, № 5. С. 1294-1309.

[59] Журавлев Ю.И., Исаев И.В. Построение алгоритмов распознавания, корректных для данной контрольной выборки // ЖВМ и МФ. 1979. Т. 19, № 3. С. 726-738.

[60] Журавлев Ю.И., Коган А.Ю. Реализация булевых функций с малым числом нулей дизъюнктивными нормальными формами и смежные задачи // ДАН СССР. 1985. Т. 285, № 4. С. 795-799.

[61] Журавлев Ю.И., Рудаков К.В. Об алгебраической коррекции процедур обработки (преобразования) информации // Проблемы прикладной математики и информатики. М.: Наука, 1987. С. 187-198.

[62] Журавлев Ю.И., Сергиенко И.В., Артеменко В.И., Чернякова А.М. Вопросы применения результатов теории распознавания при автоматизированном выборе алгоритмов решения задач в пакетах программ // Кибернетика. 1986. № 3. С. 11-17.

[63] Загоруйко Н.Г. Методы распознавания и их применение. М.: Советское радио, 1972. 119 с.

[64] Загоруйко Н.Г. Классификация задач прогнозирования на таблицах «объект-свойство» // Вычислительные системы. Новосибирск: 1981. № 88. С. 3-7.

[65] Загоруйко Н.Г., Елкина В.Н., Лбов Г.С. Алгоритмы обнаружения эмпирических закономерностей. Новосибирск: Наука, 1985. 110 с.

[66] Задорожный В.В. Один способ синтеза корректного алгоритма распознавания для заданной контрольной выборки // ЖВМ и МФ. 1986. Т. 26, № 10. С. 1159-1166.

[67] Задорожный В.В. Приведение исходной информации к стандартному виду в задачах распознавания методом вектора спада // Кибернетика. 1987. № 4. С. 82-87.

[68] Задорожный В.В. Анализ исходной информации в задачах распознавания образов // ДАН УССР, серия А. 1988. № 1. С. 73-75.

[69] Зуев Ю.А. Метод повышения надежности классификации при наличии нескольких классификаторов, основанный на принципе монотонности // ЖВМ и МФ. 1981. Т. 21, № 1. С. 157-167.

[70] Зуев Ю.А. Вероятностная модель комитета классификаторов // ЖВМ и МФ. 1986. Т. 26, № 2. С. 276-292.

[71] Зуев Ю.А. О статистических свойствах принятия решений большинством голосов в задачах классификации // ДАН СССР. 1986. Т. 288, № 2. С. 320-322.

[72] Ивахненко А.Г. Индуктивный метод самоорганизации сложных систем. Киев: Наукова думка, 1982. 296 с.

[73] Исаев И.В. Задача синтеза корректного алгоритма распознавания как задача построения минимального покрытия // ЖВМ и МФ. 1983. Т. 23, №2. С. 467-476.

[74] Исаев И.В. Синтез алгоритмов распознавания и классификации методом покрытий // ЖВМ и МФ. 1984. Т. 24, № 9. С. 1392-1417.

[75] Ицков А.Г. О емкости модели распознающих алгоритмов вычисления оценок // ЖВМ и МФ. 1982. Т. 22, № 4. С. 975-977.

[76] Катериночкина Н.Н. Поиск максимального верхнего нуля монотонной функции алгебры логики // ДАН СССР. 1975. Т. 224, № 3. С. 557-560.

[77] Катериночкина Н.Н. Поиск максимального верхнего нуля для одного класса монотонных функций k-значной логики // ЖВМ и МФ. 1981. Т. 21, № 2. С. 470-481.

[78] Кашкевич С.И., Краснопрошин В.В. Двухуровневый автоматизированный распознающий комплекс // ЖВМ и МФ. 1979. Т. 19, № 6. С. 1577-1587.

[79] Кашкевич С.И., Краснопрошин В.В. Об устойчивости одной модели алгоритмов распознавания // ЖВМ и МФ. 1983. Т. 23, № 1. С. 191-197.

[80] Кольцов П.П. Распознающие системы с переобучением. // Сб. работ по матем. кибернетике. М.: ВЦ АН СССР, 1981. С. 34-47.

[81] Кольцов П.П. Математические модели классификации больших объемов информации. М.: МЭИ, 1984. 88 с.

[82] Кондратьев А.И. Алгоритмы с памятью для решения задач вычисления свойств // Кибернетика. 1988. № 1. С. 99-106.

[83] Кондратьев А.И. Континуальные стратегические модели // Кибернетика. 1988. № 3. С. 89-96.

[84] Кочетков Д.В. О функциях близости. М.:ВЦ АН СССР, 1978. 30 с.

[85] Кочетков Д.В. Инвариантные решающие функции. Общий вид и условия корректности. М.:ВЦ АН СССР, 1987. 47 с.

[86] Кочетков Д.В. Распознающие алгоритмы, инвариантные относительно преобразований пространства признаков (I) // Распознавание, классификация, прогноз. М.: Наука, 1989. С. 82-113.

[87] Кочетков Д.В. Распознающие алгоритмы, инвариантные относительно преобразований пространства признаков (II) // Распознавание, классификация, прогноз. М.:Наука, 1989. С. 178-206.

[88] Кочетков Д.В. Об инвариантных распознающих алгоритмах, удовлетворяющих условиям неизбыточности и монотонности // ЖВМ и МФ. 1989. Т. 29, №10. С. 1206-1211.

[89] Краснопрошин В.В. Об оптимальном корректоре совокупности алгоритмов распознавания // ЖВМ и МФ. 1979. Т. 19, № 1. С. 204-214.

[90] Краснопрошин В.В. Двухуровневые модели алгоритмов распознавания // ЖВМ и МФ. 1985. Т. 25, № 10. С. 1534-1546.

[91] Кукулиев Б.М. К оценке прогнозирующей способности алгоритмов распознавания образов. Дисс. канд. физ.-мат. наук. М.: 1989. 90 с.

[92] Кукулиев Б.М., Матросов В.Л. Оценка прогнозирующей способности решения задачи обучения распознаванию образов // Математические методы распознавания образов: Тез. докл. Всесоюзн. конф. (Рига, 24-26 октября 1989 г.). Рига: МИПКРРиС при СМ ЛатвССР, 1989. С. 43-45.

[93] Лбов Г.С. Методы обработки разнотипных экспериментальных данных. Новосибирск: Наука, 1981. 160 с.

[94] Лбов Г.С. О статистической устойчивости решающих правил распознавания // Мат. статистика и ее приложения. Томск:1981. № 7. С. 114-128.

[95] Ленг С. Алгебра. М.: Мир, 1968. 564 с.

[96] Липкин Л.И. Статистические задачи распознавания и алгебраические методы. М.: ВЦ АН СССР, 1985. 25 с.

[97] Мазуров В.Д. О построении комитета системы выпуклых неравенств // Кибернетика. 1967. № 2. С. 56-59.

[98] Мазуров В.Д. Об одном методе обучения узнаванию // Кибернетика. 1970. № 2. С. 92-94.

[99] Мазуров В.Д. Комитеты систем неравенств и задача распознавания // Кибернетика. 1971. № 3. С. 140-146.

[100] Мазуров В.Д., Казанцев В.С., Белецкий Н.Г. и др. Пакет КВАЗАР прикладных программ распознавания образов (версия 2). Свердловск: УНЦ АН СССР, 1979. 121 с.

[101] Мазуров В.Д., Казанцев В.С., Сачков Н.О. и др. Комитеты в принятии решений // Кибернетика. 1984. № 1. С. 90-96.

[102] Мазуров В.Д., Казанцев В.С., Белецкий Н.Г., Кривоногов А.И., Смирнов А.И. Вопросы обоснования и применения комитетных алгоритмов распознавания // Распознавание, классификация, прогноз. М.: Наука, 1989. С. 114-148.

[103] Матросов В.Л. Корректные алгебры ограниченной емкости над множествами некорректных алгоритмов // ДАН СССР. 1980. Т. 253, № 1. С. 25-30.

[104] Матросов В.Л. О критериях полноты модели алгоритмов вычисления оценок и ее алгебраических замыканий // ДАН СССР. 1981. Т. 258, № 4. С. 791-796.

[105] Матросов В.Л. Корректные алгебры ограниченной емкости над множеством алгоритмов вычисления оценок // ЖВМ и МФ. 1981. Т. 21, № 5. С. 1276-1291.

[106] Матросов В.Л. Оптимальные алгоритмы в алгебраических замыканиях операторов вычисления оценок // ДАН СССР. 1982. Т. 262, № 4. С. 818-822.

[107] Матросов В.Л. Емкость алгебраических расширений модели алгоритмов вычисления оценок // ЖВМ и МФ. 1984. Т. 24, № 11. С. 1719-1730.

[108] Матросов В.Л. Нижние оценки емкости многомерных алгебр алгоритмов вычисления оценок // ЖВМ и МФ. 1984. Т. 24, № 12. С. 1881-1892.

[109] Матросов В.Л. Емкость полиномиальных расширений множества алгоритмов вычисления оценок // ЖВМ и МФ. 1985. Т.25, № 1. С. 122-133.

[110] Матросов В.Л. Синтез оптимальных алгоритмов в алгебраических замыканиях моделей алгоритмов распознавания // Распознавание, классификация, прогноз. М.: Наука, 1989. С.149-176.

[111] Метод комитетов в распознавании образов. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1984. 165 с.

[112] Минский М., Пейперт С. Персептроны. М.:Мир, 1971.262 с.

[113] Мирошник С.Н. Алгоритмы распознавания с непрерывной метрикой // Кибернетика. 1972. № 2. С. 54-63.

[114] Мухамедгалиев А.Ф. Построение корректного алгоритма таксономии в расирениях одного класса алгоритмов распознавания // ЖВМ и МФ. 1983. Т.23, № 1. С. 184-190.

[115] Немирко А.П. Цифровая обработка биологических сигналов. М.: Наука, 1984. 311 с.

[116] Нильсон Н. Искусственный интеллект. Методы поиска решений. М.: Мир, 1973. 272 с.

[117] Патрик Э. Основы теории распознавания образов. М.: Советское радио, 1980. 408 с.

[118] Платоненко И.М. О реализации алгоритмов типа "Кора"с помощью решения систем булевых уравнений специального вида. М.: ВЦ АН СССР, 1983. 21 с.

[119] Плохонина Т.В. О некорректности алгебраического замыкания второй степени семейства алгоритмов вычисления оценок // ЖВМ и МФ. 1985. Т. 25, № 7. С. 1073-1086.

[120] Погосян Э.М. Обучение как разновидность индуктивного вывода // Техническая кибернетика. 1978. № 3. С. 112-123.

[121] Погосян Э.М. Адаптация комбинаторных алгоритмов. Ереван: АН АрмССР, 1983. 288 с.

[122] Растригин Л.А., Эренштейн Р.Х. Коллективные правила распознавания. М.: Энергия, 1981. 244 с.

[123] Раудис Ш.Ю. Информационный анализ машинного обнаружения закономерностей (на примере задач распознавания образов) // Вычислительные системы. Новосибирск: 1981. № 88. С. 44-55.

[124] Рудаков К.В. О числе гиперплоскостей, разделяющих конечные множества в эвклидовом пространстве // ДАН СССР. 1976. Т. 231, № 6. С. 1296-1299.

[125] Рудаков К.В. О корректности алгоритмов распознавания типа потенциальных функций // ЖВМ и МФ. 1980. Т. 20, № 3. С. 737-744.

[126] Рудаков К.В. О некоторых классах алгоритмов распознавания (общие результаты). М.: ВЦ АН СССР, 1980. 66 с.

[127] Рудаков К.В. О некоторых классах алгоритмов распознавания (параметрические модели). М.: ВЦ АН СССР, 1981. 48 с.

[128] Рудаков К.В. О классах алгоритмов распознавания изображений // Автоматизация обработки сложной гарфической информации. Горький: Горьковский гос. университет им. Н.И.Лобачевского, 1984. С. 22-33.

[129] Рудаков К.В. О корректирующих операциях для задач распознавания // Проблемы искусственного интеллекта и распознавания образов: Тез. докл. и сообщ. научн. конф. с участием ученых из социалистических стран (Киев, 13-18 мая 1984 г.). Секция II: Распознавание образов. Киев: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова АН УССР, 1984. С. 119-121.

[130] Рудаков К.В. О полиномиальных расширениях некоторых семейств алгоритмов распознавания // Математические методы распознавания образов: Тез. докл. Всесоюзн. конф. (Дилижан, 16-21 мая 1985 г.). Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1985. С. 164-166.

[131] Рудаков К.В. О некоторых универсальных ограничениях для алгоритмов классификации // ЖВМ и МФ. 1986. Т. 26, № 11. С. 1719-1729.

[132] Рудаков К.В. Об основных понятиях алгебраического подхода к решению задач классификации (соотношение разрешимости и полноты) // Математические методы распознавания образов: Тез. докл. Всесоюзн. конф. (Львов, 10-12 ноября 1987 г.). Львов: ФМИ им. Г.В.Карпенко АН УССР, 1987. С. 17-18.

[133] Рудаков К.В. О симметрических и функциональных ограничениях для алгоритмов классификации // ДАН СССР. 1987.Т. 297, № 1. С. 43-46.

[134] Рудаков К.В. Универсальные и локальные ограничения в проблеме коррекции эвристических алгоритмов // Кибернетика. 1987. № 2. С. 30-35.

[135] Рудаков К.В. Полнота и универсальные ограничения в проблеме коррекции эвристических алгоритмов классификации // Кибернетика. 1987. № 3. С. 106-109.

[136] Рудаков К.В. Симметрические и функциональные ограничения в проблеме коррекции эвристических алгоритмов классификации // Кибернетика. 1987. № 4. С. 73-77.

[137] Рудаков К.В. О применении универсальных ограничений при исследовании алгоритмов классификации // Кибернетика. 1988. № 1. С. 1-5.

[138] Рудаков К.В., Трофимов С.В. Алгоритм синтеза корректных процедур распознавания для задач с непересекающимися классами // ЖВМ и МФ. 1988. Т. 28, № 9. С. 1431-1434.

[139] Рудаков К.В. Об алгебраической теории универсальных и локальных ограничений для задач классификации // Распознавание, классификация, прогноз. М.: Наука, 1989. С. 176-201.

[140] Рудаков К.В. Об особенностях универсальных ограничений для задач прогнозирования // Математические методы распознавания образов: Тез. докл. Всесоюзн. конф. (Рига, 24-26 октября 1989 г.).Рига:МИПКРРиС при СМ ЛатвССР, 1989. С.73-75.

[141] Рязанов В.В. Оптимизация алгоритмов вычисления оценок по параметрам, характеризующим представительность эталонных строк // ЖВМ и МФ. 1976. Т. 16, № 6. С. 1559-1570.

[142] Рязанов В.В. Комитетный синтез алгоритмов распознавания и классификации // ЖВМ и МФ. 1981. Т. 21, № 6. С. 1533-1543.

[143] Рязанов В.В. О синтезе классифицирующих алгоритмов на конечных множествах алгоритмов классификации (таксономии) // ЖВМ и МФ. 1982. Т. 22, № 2. С. 429-440.

[144] Рязанов В.В. О построении оптимальных алгоритмов распознавания и таксономии (классификации) при решении прикладных задач // Распознавание, классификация, прогноз. М.: Наука, 1989. С. 229-279.

[145] Самыловский А.И. Оптимизация подалгоритмов одного оптимального алгоритма распознавания // Аэрофизика и прикладная математика. М.: 1981. С. 115-117.

[146] Себастьян Г.С. Процессы принятия решений при распознавании образов. Киев: Техника, 1965. 151 с.

[147] Трофимов С.В. Оптимизация весовых коэффициентов в алгоритмах распознавания с представительными наборами // ЖВМ и МФ. 1987. Т. 27, №8. С. 1266-1271.

[148] Трофимов С.В. Исследование специальных универсальных ограничений для решения задач распознавания с непересекающимися классами. М.: ВЦ АН СССР, 1988. 18 с.

[149] Ту Дж., Гонсалес Р. Принципы распознавания образов. М.: Мир. 1978. 416 с.

[150] Чегис И.А., Яблонский С.В. Логические способы контроля электрических схем // Труды Матем. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. 1958. Т. 51. С. 270-360.

[151] Alvo M. Sequantial estimation of a truncation parameter // J. Amer. Statist. Assoc. 1978. V. 73, № 362. P. 404-407.

[152] Alvo M., Cabilio P. Bayesian estimation of the difference between two proportions // Can. J. Statist. 1982. V. 10, № 2. P. 139-145.

[153] Devijver P.A. A note on ties in voting with the k-NN rule // Pattern Recogn. 1978. V. 10, № 4. P. 297-298.

[154] Devijver P.A. Nonparametric estimation of feature evaluation criteria // Pattern Recogn. and Signal Process. 1978. P. 61-82.

[155] Devijver P.A. New error bounds with the nearest neighbor rule // IEEE Trans. Inform. Theory. 1979. V. 25, № 6. P. 749-753.

[156] Dubes R.C., Panayirci E. Pattern recognition with countinious parameter observable Markovchains // IEEE Trans. Syst. Man. and Cybern. 1978. V. 8, № 8.

[157] Greblicki W. Learning to recognize patterns with a probablistic teacher // Pattern Recogn. 1980. V. 12, № 3. P. 159-164.

[158] Jain A.K., Waller W.G. On the optimal number of features in the classification of multivariate Gaussian data // Pattern Recogn. 1978. V. 10, № 5-6. P. 365-374.

[159] Kittler I. Feature set search algoritms // Pattern Recogn. and Signal Process. 1978. P. 41-60.

[160] Kurzynski M.W., Zolniezek A. A recursive classifying decision rule for sercond-order Markovchains // Contr. and Cybern. 1980. V. 9, № 3. P. 141-147.

[161] Mizoguchi R., Shimura M. A nonparametric algorithm for detecting clusters using hierarchical structure // IEEE Trans. Pattern. Anal. and Mach. Intel. 1980. V. 2, № 4. P. 292-300.

[162] Pavel M. Sceletal categories // Pattern Recogn. 1979. V. 11, № 5-6. P. 325-327.

[163] Pavel M. Algebraic, topological and cathegorial aspects of pattern recognition: a survey // Pattern Recogn. 1981. V. 14, № 1-6. P. 117-120.